LECȚIA DE MATEMATICĂ
PĂTRATE PERFECTE

Lectia se adresează elevilor de clasa a VI-a

Autor:Găină Daria-Silviana, clasa a VI-a
C.N. Ion Minulescu, Slatina, Olt

Data:mai 2021

În această lecție vom prezenta câteva din metodele de a demonstra că un număr este sau nu pătrat perfect precum şi probleme în care folosim pătrate perfecte.

Un număr natural este pătrat perfect dacă:

- este puterea a doua a unui număr natural
- este produs de pătrate perfecte
- este putere a unui pătrat perfect
- conține în descompunerea în factori primi numai factori primi la putere pară
- Are un număr impar de divizori naturali
- Orice pătrat perfect are una dintre formele 4p *sau* 8q +1.

(Într-adevăr,dacă $n = 2k$,atunci $n^2 = 4k^2 = 4p$,iar dacă $n = 2k +1$, avem

$n^2 = 4k(k +1) +1= 8q +1$)

- Orice pătrat perfect este de forma $3p$ sau $3q +1$.

(Ca şi mai sus, considerăm $n = 3k$ sau $n = 3k +1$ sau $n = 3k + 2$ şi ridicăm la pătrat)

Un număr natural nu este pătrat perfect dacă:

- este cuprins între două pătrate perfecte consecutive
- conține in descompunerea sa în factori primi cel puțin un factor prim la putere impară
- cifra unităților este un numar din mulțimea 2,3,7,8
- are un număr par de divizori naturali
- este de forma 3k+2, 4k+2, 4k+3, 5k+2, 5k+3....

În continuare vom aplica câteva din metodele enumerate anterior în rezolvarea unor probleme.

Problema 1

Determinați cel mai mic număr natural nenul n astfel încât prin înmulțirea numărului $\overline{ababab}$ cu n să se obțină pătrat perfect.Care sunt cifrele a şi b în acest caz?

Soluție:

$\overline{ababab}$ = $\overline{ab}$ *1000+ $\overline{ab}$ *100+ $\overline{ab}$ = $\overline{ab}$ *10101= $\overline{ab}$ *3*7*13*37.

Pentru ca prin înmulțire cu n să se obțină un pătrat perfect, trebuie ca $\overline{ab}$ *şi n să conțină factorii primi 3,7,13 şi 37 (şi eventual şi alți factori).Numărul* $\overline{ab}$ *are cel mult doi dintre aceşti factori (în caz contrar* $\overline{ab}$ ≥3*7*13>100). Cel mai mic n se obține dacă alegem $\overline{ab}$ *=91=7*13 şi n=3*37=111.*

Problema 2

Fie a, b, c, d, e numere naturale distincte si impare.Arătați că numerele abcd+1, bcde+1, cdea+1, deab+1 și eabc+1 nu pot fi , simultan, pătrate perfecte

Solutie:

Deoarece numerele a, b,c, d, e sunt impare, a, b, c, d, e=M4+1, M4+3.Presupunem prin reducere la absurd că toate cele 5 numere abcd+1, bcde+1, cdea+1, deab+1, eabc+1 sunt pătrate perfecte.Rezultă abcd+1, bcde+1, cdea+1, deab+1, eabc+1=M4, M4+1.Cum a, b, c, d, e sunt impare, aceasta este posibil doar daca abcd, bcde, cdea, deab, eabc=M4+3.Deducem (abcd)*(bcde)*(cdea)*deab)*(eabc)=$(abcde)^4$=$(M4+3)^5$=M4+3^5= M4+243=M4+3.Dar $(abcde)^4$=$((abcde^2)^2)$=M4+1, deci presupunerea initiala este falsă.

În concluzie, numerele abcd+1, bcde+1, cdea+1, deab+1, eabc+1 nu pot fi simultan, pătrate perfecte.

Problema 3

Arătaţi că numerele naturale $\overline{abcd4}$, $\overline{mnfgh6}$ nu pot fi numere naturale pătrate perfecte consecutive, oricare ar fi a, b, c, d, m, n, f, g, h – cifre, a≠0, m≠0.

Solutie:

Ştim că între două numere naturale pătrate perfecte consecutive există un număr par de numere naturale. Presupunem că numerele date sunt pătrate perfecte consecutive. Între cele două numere există $\overline{mnfgh6}-\overline{abcd4}-1$ numere naturale.

Însă $U(\overline{mnfgh6} - \overline{abcd4}-1)=1 \Rightarrow \overline{mnfgh6} - \overline{abcd4} -1$ este un număr impar, aşadar cele două numere nu pot fi pătrate perfecte consecutive, deoarece între două numere naturale pătrate perfecte consecutive există un număr par de numere naturale.

Problema 4

Demonstraţi că suma pătratelor a trei, patru sau cinci numere întregi consecutive nu poate fi pătrat perfect.

Soluţie:

Fie n-1, n şi n+1, $n \in N$, trei numere întregi consecutive. Suma pătratelor lor este $(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=n^2-2n+1+n^2+n^2+2n+1=3n^2+2$ care are forma 3k+2 şi care nu este pătrat perfect. Deci suma pătratelor a trei numere întregi consecutive nu este pătrat perfect.

Fie n-1, n, n+1 şi n+2 $n \in N$, patru numere întregi consecutive. Suma pătratelor lor este $(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2= 4(n^2+n+1)+2=4k+2$, $k \in N$; de unde rezultă că suma pătratelor a patru numere întregi nu este pătrat perfect.

Fie n-2, n-1, n, n+1 şi n+2 $n \in N$, cele cinci numere întregi consecutive.

$A= (n-2)^2 +(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2= 5n^2+10=5(n^2+2)$, $n \in N$.

Deoarece n^2 nu se poate termina nici în 3 şi nici în 8 se deduce uşor că 25 nu divide A, ceea ce demonstrează că A nu este pătrat perfect.

Problema 5

Dacă a, b $\in$ N, arătați că numărul $A=4^a+4^b+2^a+2^b+2^{a+b+1}$ nu poate fi pătrat perfect.

Solutie:

Notăm $2^a=x$, $2^b=y$ şi obținem $A=x^2+y^2+x+y+2xy=(x+y)^2+(x+y)=(x+y)(x+y+1)$.Astfel, A este egal cu produsul a două numere naturale nenule şi consecutive, deci prime între ele.Dacă A ar fi pătrat perfect, atunci cei doi factori ar fi pătrate perfecte şi numere naturale consecutive, ceea ce este valabil doar pentri 0^1 şi 1^2, imposibil în cazul de față.

Bibliografie

Gazeta matematica

Olimpiade si concursuri şcolare