

P3. Fie G un grup generat de două elemente x și y care verifică relațiile $xy^2 = y^3x$ și $x^2y = yx^3$. Determinați ordinul grupului G .

S. Din relațiile date rezultă că

$$xy^2x^{-1} = y^3 \quad \text{și} \quad y^{-1}x^2y = x^3,$$

astfel că $x^3y^4x^{-3} = y^{-1}x^2y \cdot y^4 \cdot y^{-1}x^{-2}y = y^{-1}(x(xy^2x^{-1})^2x^{-1})y = y^{-1}(xy^6x^{-1})y = y^{-1}(xy^2x^{-1})^3y = y^{-1}y^9y = y^9 = x^2y^4x^{-2}$. Deducem că $y^4x = xy^4 = y^3xy^2 = y^6x$, deci $y^2 = 1$. Dar atunci $x = yx$, astfel că $y = 1$. Obținem că $x^2 = x^3$, deci $x = 1$. Cum $G = \langle x, y \rangle$, rezultă că $G = 1$, deci $|G| = 1$.