Clasa a X-a - Etapa I - Problema 4

Enunţ. Fie un triunghi ABC dreptunghic în A şi $D \in (BC)$ astfel încât $AD \perp BC$. Cercul de diametru (AD) intersectează laturile (AB) şi (AC) în E, respectiv F, iar $\{G\} = AD \cap EF$. Arătaţi că, dacă $AG^2 = AE \cdot AF$, atunci $BC^2 = 4 \cdot AB \cdot AC$.

Soluţie. Deoarece $[AD]$ este diametru, se obţine $m(\sphericalangle AED) = m(\sphericalangle AFD) = m(\sphericalangle EAF) = 90^o$, aşadar $AEDF$ este dreptunghi şi G este centrul cercului de diametru $[AD]$. Fie O mijlocul laturii $[BC]$ şi $AO \cap EF = \{T\}$. Evident, O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Deoarece $m(\sphericalangle AGT) = 2 \cdot m(\sphericalangle GAE) = 2 \cdot m(\sphericalangle DAB) = 2 \cdot m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle AOB)$, deducem că patrulaterul $GDOT$ este inscriptibil. Aşadar $m(\sphericalangle ATG) = m(\sphericalangle GDO) = 90^o$. Relaţia $AG^2 = AE \cdot AF$ conduce la $AG^2 = AT \cdot EF = 2 \cdot AT \cdot AG$, de unde $AG = 2 \cdot AT$ şi astfel $m(\sphericalangle AGT) = 30^o$. Apoi $m(\sphericalangle AOD) = m(\sphericalangle AGT) = 30^o \Rightarrow AO = 2 \cdot AD$, de unde $\frac{BC}{2} = 2 \cdot AD$ sau $BC^2 = 4 \cdot AD \cdot BC \Rightarrow BC^2 = 4 \cdot AB \cdot AC$. $\square$