**Problema 1.** Pentru două numere naturale $m$ şi $n$, arătaţi că numărul $5^m + 5^n$ se scrie ca sumă de două pătrate perfecte dacă şi numai dacă $m - n$ este par.

*Vasile Zidaru*, Olimpiada Naţională de Matematică, 2003

**Soluţie:**

• Arătăm mai întâi că dacă numărul $5^m + 5^n$ se scrie ca sumă de două pătrate perfecte atunci $m$ şi $n$ au aceeaşi paritate.
Presupunând contrariul, anume că unul dintre numere este par iar celălalt impar, am obţine un număr de forma $5^{2k} + 5^{2j+1}$ care s-ar scrie ca sumă de două pătrate. Evident, acest număr fiind par, el s-ar scrie fie ca suma pătratelor a două numere pare, fie ca suma pătratelor a două numere impare. În primul caz suma ar fi un multiplu de 4. În cazul al doilea, deoarece pătratul unui număr impar, $2m + 1$, este $4m(m + 1) + 1$, adică un număr care dă rest 1 la împărţirea cu 8 (numărul $m(m + 1)$ este mereu par), s-ar obţine un număr care dă restul 2 la împărţirea cu 8. Prin urmare, dacă o sumă de două pătrate este un număr par, acesta poate da unul din resturile 0, 2 sau 4 la împărţirea cu 8.
Dar $5^{2k} = 25^k = (24 + 1)^k = (M_8 + 1)^k = M_8 + 1^k = M_8 + 1$, iar $5^{2j+1} = 5 \cdot 25^j = 5 \cdot (24 + 1)^j = 5(M_8 + 1) = M_8 + 5$, prin urmare $5^{2k} + 5^{2j+1} = M_8 + 6$, ceea ce contrazice presupunerea făcută.

• Arătăm acum că dacă $m$ şi $n$ au aceeaşi paritate, atunci $5^m + 5^n$ se scrie ca o sumă de două pătrate perfecte.
Dacă $m$ şi $n$ sunt pare, atunci $5^m$ şi $5^n$ sunt pătrate perfecte, deci concluzia este evidentă.
Dacă $m$ şi $n$ sunt impare, $m = 2a + 1$, $n = 2b + 1$ cu $a, b \in \mathbb{N}$, atunci $5^m + 5^n = 5(5^{2a} + 5^{2b}) = (1+4)(5^{2a} + 5^{2b}) = (5^{2a} + 4 \cdot 5^a \cdot 5^b + 4 \cdot 5^{2b}) + (4 \cdot 5^{2a} - 4 \cdot 5^a \cdot 5^b + 5^{2b}) = (5^a + 2 \cdot 5^b)^2 + (2 \cdot 5^a - 5^b)^2$, deci $5^m + 5^n$ se scrie ca o sumă de două pătrate, anume cele ale numerelor naturale $5^a + 2 \cdot 5^b$ şi $|2 \cdot 5^a - 5^b|$.

**Remarcă:**
Scrierea ca sumă de pătrate rezultă dintr-o identitate cunoscută, *identitatea lui Lagrange*:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$