Clasa a X-a

Problema 1.

a) *Fie numerele complexe* $z = \cos x + i \sin x$ *şi* $w = \cos y + i \sin y$, *unde* $x, y \in [0, 2\pi]$. *Demonstraţi că*

$$\frac{z-w}{z+w} = i\mathrm{tg}\frac{x-y}{2}.$$

b) *Fie* $z_1, z_2, ..., z_{2018} \in \mathbb{C}$ *distincte şi având module egale. Demonstraţi că există* $k, l \in \{1, 2, 3, ..., 2018\}$, $k \neq l$, *astfel încât*

$$\left|\frac{z_k - z_l}{z_k + z_l}\right| \leq \mathrm{tg}\frac{\pi}{2018}.$$

Problema 2. *Fie mulţimea*

$$\mathcal{M} = \left\{(x, y)\,\middle|\, x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 - 2y \leqslant 0\right\}$$

şi funcţia

$$f : \mathcal{M} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 10y.$$

Determinaţi

a) $\min f$;

b) $\max f$.

Problema 3. *Pentru orice mulţime finită nevidă* X, *considerăm* $B_X = \{\ f : X \to X \,|\, f \text{ bijectivă}\}$. *Pentru orice element* $f \in B_X$, *notăm* $\mathrm{ord}\, f$ *ca fiind cel mai mic număr* $k \in \mathbb{N}^*$ *pentru care*

$$\underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{k\, ori\ f} = 1_X.$$

Fie $Fix(f) = \{c \in X \,|\, f(c) = c\}$.

Demonstraţi că, oricare ar fi $f, g \in B_X$ *cu proprietatea* $f \circ g = g \circ f$ *şi* $(\mathrm{ord}\, f, \mathrm{ord}\, g) = 1$, *avem* $Fix(f \circ g) = Fix(f) \cap Fix(g)$. *Mai rămâne valabilă egalitatea precedentă dacă* $(\mathrm{ord}\, f, \mathrm{ord}\, g) = 2$?