Problema 1. Fie a şi b două numere naturale fixate. Demonstraţi că dacă $a \cdot b$ este număr par, atunci există numere naturale c şi d astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, iar dacă $a \cdot b$ este număr impar, atunci nu există asemenea numere c şi d.

M. Gerver (revista *Kvant*)

Soluţie:

• Dacă $a \cdot b$ este par, distingem două situaţii: a şi b au parităţi diferite sau a şi b sunt ambele pare.

1. Dacă a şi b au parităţi diferite, atunci $a^2 + b^2$ este impar. Fie $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^2 + b^2 = 2N + 1$. Putem, de exemplu, să alegem $c = N$ şi $d = N + 1$. (Vom avea $d^2 - c^2 = (N + 1)^2 - N^2 = 2N + 1 = a^2 + b^2$.)
2. Dacă a şi b sunt ambele pare, pătratele lor vor fi multipli de 4, deci va exista $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^2 + b^2 = 4N$. Alegem atunci $c = N - 1$ şi $d = N + 1$. Avem $d^2 - c^2 = (N + 1)^2 - (N - 1)^2 = 4N = a^2 + b^2$.

• Dacă $a \cdot b$ este impar, adică a şi b sunt impare, atunci $a^2 + b^2$ este par, dar nedivizibil cu 4. (Dacă $a = 2x + 1$, $b = 2y + 1$, $x, y \in \mathbb{N}$, atunci $a^2 + b^2 = (2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 = 4(x^2 + x + y^2 + y) + 2 = M_4 + 2$.) Pe de altă parte, $d^2 - c^2 = (d - c)(d + c)$, fiind produsul a două numere de aceeaşi paritate, este fie impar, fie divizibil cu 4, deci nu poate fi egal cu $a^2 + b^2$.