Etapa 6, Problema 3

Pe laturile (AB), (CD) şi (DA) ale pătratului $ABCD$ se consideră punctele E, M respectiv N astfel încât E este mijlocul lui (AB), iar dreptele BM şi EN sunt paralele. Demonstraţi că dreapta MN este tangentă cercului înscris în pătrat.

***

Soluţie (primită de la majoritatea concurenţilor).

Raportăm planul la un reper cartezian cu originea în O, având dreptele AB şi AD ca axe şi astfel încât segmentul AB să aibă lungimea 2; atunci $A(0,0), B(2,0), C(2,2), D(0,2)$, iar $M(m,2)$, cu $m \in (0,1)$ (în caz contrar, N nu s-ar mai afla pe segmentul AD, ci pe prelungirea acestuia).

Panta dreptei BM este $\frac{2}{m-2}$, prin urmare ecuaţia lui EN (care are aceeaşi pantă ca şi BM) este $2x-(m-2)y-2=0$. Obţinem coordonatele punctului N, anume $\left(0, \frac{2}{2-m}\right)$. Ecuaţia dreptei MN va fi $2(m-1)x-m(m-2)y-2m=0$.

Pentru a demonstra cerinţa problemei, ar fi destul să arătăm că distanţa de la centrul $O(1,1)$ al pătratului la dreapta MN este egală cu raza cercului înscris, deci cu 1. Într-adevăr, avem:

$$d(O, MN) = \frac{|2(m-1)-m(m-2)-2m|}{\sqrt{4(m-1)^2+m^2(m-2)^2}} = \frac{m^2-2m+2}{\sqrt{(m^2-2m+2)^2}} = 1.$$

Soluţie alternativă (**Ciprian Ştirbu**, Bacău şi **Octavian Roşu**, Ploieşti).

Fie $\alpha = \sphericalangle BMC = \sphericalangle AEN = \sphericalangle EBM$, $AB=2$, $DN=a, DM=b$ şi O centrul pătratului. Dreapta MN este tangentă cercului înscris în pătrat dacă şi numai dacă acest cerc este cercul D-exînscris triunghiului DMN. Acest din urmă cerc are centrul I pe DB şi fie r raza sa; dacă vom dovedi că $r=1$, atunci $I \equiv O$ şi problema ar fi rezolvată.

Avem: $r = p \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2} \sphericalangle ADC\right) = p \cdot \mathrm{tg} 45^\circ = p$, unde $p = \frac{1}{2}(DN+MN+MD) = \frac{1}{2}\left(a+b+\sqrt{a^2+b^2}\right)$. Apoi, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{AN}{AE} \Rightarrow a = 2-\mathrm{tg}\alpha$ şi $\mathrm{tg}\alpha = \frac{BC}{CM} \Rightarrow b = 2-\frac{2}{\mathrm{tg}\alpha}$. Atunci:

$$r=1 \Leftrightarrow p=1 \Leftrightarrow a+b+\sqrt{a^2+b^2}=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 2-a-b \Leftrightarrow 2+ab = 2(a+b)$$

$$\Leftrightarrow 2+(2-\mathrm{tg}\alpha)\left(2-\frac{2}{\mathrm{tg}\alpha}\right) = 2\left(2-\mathrm{tg}\alpha+2-\frac{2}{\mathrm{tg}\alpha}\right)$$

$$\Leftrightarrow 8-2\left(\mathrm{tg}\alpha+\frac{2}{\mathrm{tg}\alpha}\right) = 8-2\left(\mathrm{tg}\alpha+\frac{2}{\mathrm{tg}\alpha}\right),$$

ceea ce este, evident, adevărat.

Soluţie alternativă (**Vladimir Cucu**, Chişinău).

Considerăm: X şi Y mijloacele segmentelor CD, respectiv AD, O centrul pătratului, Z proiecţia lui O pe MN; notăm cu a latura pătratului şi fie $x = \mathrm{tg}\,(\measuredangle\, ANE) = \mathrm{tg}\,(\measuredangle\, MBC)$.

Evident că $M \in (DY)$ şi $N \in (DX)$, prin urmare $x = \mathrm{tg}\,(\measuredangle\, ANE) = \frac{AE}{AN} = \frac{a}{2\left(\frac{a}{2}+XN\right)} \Rightarrow XN = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{x}-1\right)$, iar $x = \mathrm{tg}\,(\measuredangle\, MBC) = \frac{MC}{BC} = \frac{\frac{a}{2}+MY}{a} \Rightarrow MY = \frac{a}{2}\,(2x-1)$. Apoi, este clar că $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, ceea ce face ca toţi numitorii care vor apărea în continuare să fie nenuli.

Pentru a demonstra cerinţa problemei, ar fi suficient să arătăm că $OZ = OX$. Avem echivalent:

$$OZ = OX \Leftrightarrow \measuredangle\, XNO \equiv \measuredangle\, MNO \Leftrightarrow \measuredangle\, XNO \equiv \measuredangle\, MNO$$

$$\Leftrightarrow \measuredangle\, DNM = 180^\circ - 2\cdot \measuredangle\, XNO \Leftrightarrow \mathrm{tg}\,(\measuredangle\, DNM) = -\mathrm{tg}\,(2\cdot \measuredangle\, XNO)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}\,(\measuredangle\, DNM) = \frac{2\cdot \mathrm{tg}\,(\measuredangle\, XNO)}{\mathrm{tg}^2\,(\measuredangle\, XNO)-1} \Leftrightarrow \frac{DM}{DN} = \frac{2\cdot \frac{a}{2XN}}{\frac{a^2}{4XN^2}-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{a}{2}\,(2-2x)}{\frac{a}{2}\left(2-\frac{1}{x}\right)} = -\frac{a}{\frac{a}{2}\left(\frac{1}{x}-1\right)} : \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{x}-1\right)^2}-1\right) \Leftrightarrow \frac{2x\,(1-x)}{2x-1} = \frac{2x\,(1-x)}{2x-1},$$

ceea ce este, evident, adevărat.