ViitoriOlimpici.ro

Problema 4
Etapa 1
Clasa a V-a

Problema 4. Arătați că nu există numere naturale n astfel încât să avem

$$1! + 2! + 3! + \ldots + n! = 2^{2024},$$

unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

Soluţie: Dacă $n = 4$ avem

$$1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 33 < 64 = 2^6 < 2^{2024}.$$

Dacă $n \geq 5$, atunci $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ și deci ultima cifră a lui $n!$ va fi 0.

Deducem că, pentru $n \geq 5$, ultima cifră a lui $1! + 2! + 3! + \ldots + n!$ este 3, adică $1! + 2! + 3! + \ldots + n!$ este un număr impar.

Dar 2^{2024} este un număr par, prin urmare egalitatea nu poate avea loc.