P4. Fie $\alpha > 0$ oarecare fixat, iar $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir cu proprietatea că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k^\alpha} \quad , (\forall) n \in \mathbb{N}^*,$$

este convergent. Arătaţi că

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} x_k = 0.$$

S. Fie $l = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} y_n$ şi $(z_n)_{n\geq 1}$ şirul defint prin

$$z_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} x_k \quad , (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, convenind că $y_0 = 0$, avem că

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) \cdot k^\alpha = \sum_{k=1}^{n-1} y_k (k^\alpha - (k+1)^\alpha) + y_n \cdot n^\alpha,$$

astfel că

$$z_n = y_n + \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} y_k (k^\alpha - (k+1)^\alpha).$$

Cu lema Césaro-Stolz obţinem

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} y_k (k^\alpha - (k+1)^\alpha) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{y_n(n^\alpha - (n+1)^\alpha)}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} = -\lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = -l.$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} z_n = l - l = 0.$