Concursul Gazeta Matematică și ViitoriOlimpici.ro, Ediția a XVI-a, Etapa 5

Barem - Clasa a XI-a

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A) = 1 + i$. Valoarea expresiei $\det(A^3) + \det(iA)$ este:

- 0
- $1 - i$
- $-1 + i$
- $3 - 3i$
- $-2 + i$

2. Dacă $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este o soluție a ecuației $x^5 = 1$, atunci determinantul $\begin{vmatrix} z & -z & 0 \\ 0 & z^2 & -1 \\ 1 & z & 1+z \end{vmatrix}$ are valoarea:

- -1
- 1
- 0
- -4
- 4

3. Considerăm permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Numărul soluțiilor ecuației $x^2 = \sigma,\ x \in S_4$, este egal cu:

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4

4. Suma numerelor reale a și b pentru care $\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + ax) = b$ este egală cu:

- 1
- $-\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2}$
- $\frac{3}{2}$
- -1

5. Mai jos sunt enumerate cinci enunțuri referitoare la șiruri de numere reale.
A. Orice șir convergent este monoton și mărginit.
B. Orice șir monoton are limită.
C. Orice șir descrescător este mărginit superior.
D. Orice șir mărginit conține un subșir convergent.
E. Orice șir conține un subșir monoton.
Care dintre aceste afirmații este falsă?

- **A**
- B
- C
- D
- E

6. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Suma elementelor matricei A^{2022} este egală cu:

- -8088
- -6063
- 0
- 1011
- 6066

7. Limita $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$ este egală cu:

- $\frac{1}{e^2}$
- $\frac{1}{e}$
- 1
- $\sqrt{e}$
- e

8. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = x_n + 2^{-x_n}$, pentru orice $n \geq 1$.
Atunci:

- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$
- $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.
- $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.
- $(x_n)_{n\geq 1}$ nu are limită.
- $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este monoton

9. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = x_n + 2^{-x_n}$, pentru orice $n \geq 1$.
Limita $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\ln n}$ este egală cu:

- e
- $\ln 2$
- $\dfrac{1}{e}$
- $\dfrac{1}{\ln 2}$
- $\dfrac{1}{e \ln 2}$

10. Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este definit astfel: $a_1 = \sqrt{8}$ și $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \dfrac{2}{3^n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Atunci:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

11. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A) = \mathrm{Tr}(A) = 1$ și $M = \{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
Numărul elementelor mulțimii M este:

- 1
- 2
- 3
- 6
- ∞

12. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, cu $\det(A) = 5$ și $\text{Tr}(A) = 6$. Notăm $M = \{a \in \mathbb{R} \mid \det(A^4 + aA^2 + 25I_2) = 25\}$. Atunci:

- $M = \{25\}$
- $M = \{-27, -25\}$
- $M = \{0\}$
- $M = \{-10, 9\}$
- $M = \{-25\}$

13. Valoarea maximă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin
$$f(x) = \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 3 & 3 \\ x & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}, \ x \in \mathbb{R},$$
este:

- 0
- $\frac{1}{2}$
- 1
- 2
- 8

14. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Atunci A^{2022} este:

- I_2
- O_2
- $3A$
- $2021A$
- $4^{2021}A$

15. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Numărul matricelor $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X^{2022} = A$ este egal cu:

- 1011
- 2022
- 2
- 0
- 1

16. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A \cdot A^T = I_3$, unde prin A^T am notat transpusa matricei A. Atunci:

- $\mathrm{Tr}(A) = 3$
- $\det(A) = 1$
- $A = A^T$
- $\det(A^2 - I_3) = 0$
- $\det(A - I_3) = 0$

17. Fie $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 4} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ astfel încât pe diagonala principală avem zerouri (deci $a_{ii} = 0$ pentru $i \in \{1, \ldots, 4\}$), iar în rest numere reale nenule. Numărul termenilor nenuli ai sumei $s = \sum\limits_{\sigma \in S_4} a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot a_{3\sigma(3)} \cdot a_{4\sigma(4)}$ este:

- 9
- 23
- 12
- 8
- 7

18. Definim șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ prin $a_n = [\sqrt{2} + \{n\sqrt{2}\}]$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă și respectiv partea fracționară a numărului real x. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ este:

- $\sqrt{2}$
- $2\sqrt{2}$
- 0
- $1 + \sqrt{2}$
- ∞

19. Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relația de recurență $x_{n+1} \cdot x_{n-1}^5 = x_n^6$, cu $x_0 = 4$ și $x_1 = 2$. Limita șirului $(x_n)_{n\geq 0}$ este:

- ∞
- 0
- 1
- 2
- 5

20. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $AB + 5I_n = 3A + 2B$. Câte dintre următoarele patru afirmații sunt adevărate?
(1) $A - 2I_n$ este inversabilă
(2) $B - 3I_n$ este inversabilă
(3) $AB = BA$
(4) Ecuația $AX = 2X$ are soluții nenule în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4

21. Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este definit prin $x_n = \dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2}-\ldots+(-1)^{n-1}\sqrt{1}}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$. Atunci:

- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$
- $(x_n)_{n\geq 1}$ nu are limită

22. Considerăm șirul $(e_n)_{n\geq 1}$ definit prin $e_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Limita șirului $x_n = \dfrac{n\left(\sqrt[n]{e_n}-1\right)}{\ln e_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este:

- 0
- $\dfrac{1}{e}$
- $\dfrac{1}{2}$
- 1
- e

23. Considerăm șirul $(e_n)_{n\geq 1}$ definit prin $e_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Limita șirului $y_n = \sqrt[n]{n!}\left(e^{\sqrt[n]{e_n}-1} - 1\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$ este:

- 0
- $\dfrac{1}{e}$
- 1
- e
- ∞

24. Fie $L = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n} \right)^n$. Atunci

- $L = 0$
- $L = 1$
- $L = e$
- $L = e^2$
- $L = \infty$