Viitori Olimpici – martie 2020
CLASA A VIII-A

E:15690. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A şi D un punct pe ipotenuza BC. Demonstraţi că $\dfrac{AB^4}{DC} + \dfrac{AC^4}{DB} \geqslant BC^3$. Când are loc egalitatea?

Ion Pătraşcu, Craiova

E:15691. Dacă a, b şi c sunt numere reale nenule pentru care $a+b+c = 9$ şi $ab + bc + ca = 27$, calculaţi $a^{2020} + b^{2020} + c^{2020}$.

D.M.Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi *Neculai Stanciu*, Buzău

E:15692. Demonstraţi că, dacă numerele întregi nenule x, y, z verifică relaţiile $x + y + z = 0$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = 2t$, unde t este număr natural, atunci $2(x^4 + y^4 + z^4)$ este pătrat perfect.

Gheorghe Molea, Curtea de Argeş

E:15693. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$16\{x\}^2 + 1 = 8x,$$

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

S:E20.111. Determinaţi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că

$$f(x) \cdot f(y) \cdot f(z) = xyz - 2x \cdot f(y) - 2y \cdot f(z) - 2z \cdot f(x) - 8,$$

pentru orice x, y, z numere reale.

Vasile Scurtu, Bistriţa

S:E20.116. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax+3$, unde a este un număr real. Determinaţi numerele reale a pentru care aria triunghiului determinat de reprezentarea grafică a funcţiei şi axele de coordonate este egală cu 6 unităţi de arie.

Victor Felecan, Focşani

S:E20.118. Fie x un număr real astfel încât $\dfrac{x}{x^2 + x + 1} = \dfrac{1}{4}$.

Calculaţi $a = \dfrac{x^4}{x^8 + x^4 + 1}$.

Vasile Scurtu, Bistriţa

S:E20.120. Într-o piramidă patrulateră regulată avem relaţia $3\mathcal{A}_b = \sqrt{3}\mathcal{A}_{\text{lat}}$, unde $\mathcal{A}_b$ reprezintă aria bazei, iar $\mathcal{A}_{\text{lat}}$ aria laterală. Arătaţi că feţele laterale sunt triunghiuri echilaterale.

Ştefan Marica, Drobeta Turnu Severin