Problema 2. Arătați că în orice triunghi ascuțitunghic ABC are loc inegalitatea

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}S}+1\geq 2\cdot\frac{4R+r}{\sqrt{3}p},$$

notațiile fiind cele uzuale.

Mihai Opincariu, C.O:4967 G.M.B. nr. 9/2008

<u>Soluție</u>. Inegalitatea se scrie echivalent sub forma $\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}+\sqrt{3}\geq 2\cdot\frac{4R+r}{p}$.

Pe de altă parte, în orice triunghi au loc relațiile:

$$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}.$$

În felul acesta inegalitatea devine $\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C+\sqrt{3}\geq 2\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$ sau $\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C+3\operatorname{ctg}\frac{A+B+C}{3}\geq 2\left(\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B+C}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C+A}{2}\right)$, adică inegalitatea lui Tiberiu Popoviciu aplicată funcției $\operatorname{ctg}x$, care este convexă pe intervalul $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

<u>Observații</u>. 1. Întrucât este cunoscut că $\frac{4R+r}{\sqrt{3}p}\geq 1$, din rezultatul problemei se obține $\frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}S}\geq\frac{4R+r}{\sqrt{3}p}$ de unde rezultă ca inegalitatea $4R+r\geq\sqrt{3}p$ este „mai tare” decât inegalitatea $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$.

2. Inegalitatea lui Tiberiu Popoviciu

Dacă $f:I\to\mathbb{R}$ este o funcție convexă pe intervalul I, atunci are loc inegalitatea

$$\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}-f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\geq\frac{2}{3}\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right)+f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right),$$

pentru orice $x,y,z\in I$.