ViitoriOlimpici.ro

Problema 3
Etapa 7
Clasa a VI-a

Problema 3. Se consideră numerele raţionale nenule x, y şi z astfel încât $y+z \neq x$, $x+y \neq z$, $x+z \neq y$ şi $\dfrac{x}{x-y-z}=\dfrac{y}{y-x-z}=\dfrac{z}{z-x-y}$. Calculaţi $E=\dfrac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$.

* * *

Soluţie:

Din $\dfrac{x}{x-y-z}=\dfrac{y}{y-x-z}=\dfrac{z}{z-x-y}$ avem $\dfrac{x}{x-y-z}=\dfrac{y}{y-x-z}=\dfrac{z}{z-x-y}=\dfrac{x+y+z}{-x-y-z}=-1$, pentru $x+y+z \neq 0$.

Din $\dfrac{x}{x-y-z}=-1$ rezultă $x=-x+y+z$, de unde $y+z=2x$.

Analog obţinem $x+y=2z$ şi $z+x=2y$.

Atunci $E=\dfrac{xyz}{2z \cdot 2x \cdot 2y}=\dfrac{1}{8}$

Dacă x, y şi z sunt numere raționale nenule astfel încât $x+y+z=0$, atunci $x+y=-z$, $y+z=-x$ şi $z+x=-y$, iar relația din enunț devine $E=\dfrac{xyz}{(-z)(-x)(-y)}=-1$.