Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia

$$(m+n^2)(m^2+n)=(m+n)^3.$$

Olimpiadă Irlanda, 2003

Soluţie:
Ecuaţia se scrie echivalent $m^3+mn+n^2m^2+n^3=m^3+3m^2n+3mn^2+n^3$, adică $mn(mn-3m-3n+1)=0$. Distingem trei cazuri:
1. $m=0$ şi atunci $n\in\mathbb{Z}$ poate fi arbitrar;
2. $n=0$ şi atunci $m\in\mathbb{Z}$ poate fi arbitrar;
3. $mn-3m-3n+1=0$, sau, echivalent, $(m-3)(n-3)=8$. Deducem că $(m-3,\ n-3)\in\{(-8,-1),(-4,-2),(-2,-4),(-1,-8),(1,8),(2,4),(4,2),(8,1)\}$ adică $(m,n)\in\{(-5,2),(-1,1),(1,-1),(2,-5),(4,11),(5,7),(7,5),(11,4)\}$.
În concluzie, soluţiile sunt: $(m,n)\in\{(a,0)\mid a\in\mathbb{Z}\}\cup\{(0,b)\mid b\in\mathbb{Z}\}\cup\{(-5,2),(-1,1),(1,-1),(2,-5),(4,11),(5,7),(7,5),(11,4)\}$.

Observaţie: O problemă cu un enunţ asemănător (dar cu o rezolvare semnificativ diferită) a fost dată la a 16-a Olimpiadă de matematică din SUA:

Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi nenule ecuaţia

$$(x^2+y)(x+y^2)=(x-y)^3.$$

Pentru rezolvarea acestei probleme se poate vedea *Titu Andreescu, Dorin Andrica – O introducere în studiul ecuaţiilor diofantiene*, Ed. GIL, 2002, pag. 15 şi 123.