Problemă. Fie a şi b numere naturale nenule şi mulţimile $A = \{2a+2, 5\}$ şi $B = \{b+1, 2a+1\}$.

a) Determinaţi a şi b astfel încât mulţimea $A \cup B$ să aibă două elemente.

b) Determinaţi a şi b pentru care mulţimea $A \cup B$ are trei elemente.

Mircea Fianu

Soluţie: a) Pentru ca $A \cup B$ să aibă două elemente trebuie ca $A = B$.

Cum $2a+1 \neq 2a+2$ trebuie să avem $2a+1 = 5$ şi $b+1 = 2a+2$. Din $2a+1 = 5$ obţinem $a = 2$, iar din $b+1 = 2a+2$ obţinem $b = 5$.

b) Pentru ca $A \cup B$ să conţină trei elemente sunt posibile mai multe situaţii.

1. $2a+1 = 5$ şi $b+1 \neq 2a+2$. Din $2a+1 = 5$ obţinem $a = 2$, iar din $b+1 \neq 2a+2$ obţinem $b \neq 5$. Cum $b+1 \neq 2a+1$ este necesar ca $b \neq 4$.

2. $b+1 = 5$ şi $2a+1 \neq 5$. De aici avem $b = 4$ şi $a \neq 2$

3. $b+1 = 2a+2$ şi $2a+1 \neq 5$. Obţinem $b = 2a+1$ şi $a \neq 2$.

În concluzie, $A \cup B$ are trei elemente în situaţiile: $a = 2$ şi $b \in \mathbb{N} \setminus \{4, 5\}$; $b = 4$ şi $a \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$; $b = 2a+1$ şi $a \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$.