P3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ patru matrice care comută două câte două, iar $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ matricea definită prin

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Arătaţi că M este inversabilă dacă şi numai dacă $AD - BC$ este inversabilă.

R: Dacă matricea $AD - BC$ este inversabilă şi considerăm matricea

$$N = \begin{bmatrix} D \cdot (AD-BC)^{-1} & -B \cdot (AD-BC)^{-1} \\ -C \cdot (AD-BC)^{-1} & A \cdot (AD-BC)^{-1} \end{bmatrix},$$

atunci $M \cdot N = I_{2n}$, astfel că matricea M este inversabilă, cu inversa $M^{-1} = N$.
Dacă matricea M este inversabilă, fie

$$N = \begin{bmatrix} X & Y \\ X & T \end{bmatrix} \quad , \text{ cu } X, Y, Z, T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),$$

inversa sa. Atunci au loc relaţiile

$$(1) \quad AX + BZ = I_n \qquad AY + BT = 0_n\,,$$

$$CX + DZ = 0_n \qquad CY + DT = I_n$$

Obţinem că $(AD - BC)X = D$, $(AD - BC)Z = -C$, $(AD - BC)Y = -B$ şi $(AD - BC)T = A$. Dar atunci, înlocuind în (1), avem că

$$(AD - BC)TX - (AD - BC)YZ = I_n\,,$$

astfel că $AD - BC$ este inversabilă, cu inversa $TX - YZ$.