Problema 2. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{R}$ ecuaţia $[3\lg x] = [2\lg x]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Gazeta Matematică

Soluţie. Deoarece $\{a\} = a - [a]$, ecuaţia poate fi scrisă sub forma $\lg x = \{3\lg x\} - \{2\lg x\}$, $x > 0$. Deoarece $\{3\lg x\} - \{2\lg x\} \in (-1, 1)$, deducem că $\lg x \in (-1, 1)$, prin urmare $[3\lg x] \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ şi $[2\lg x] \in \{-2, -1, 0, 1\}$. Avem patru cazuri:

i) $[3\lg x] = [2\lg x] = -2 \iff \lg x \in \left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right) \iff x \in \left[\frac{1}{\sqrt[3]{100}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

ii) $[3\lg x] = [2\lg x] = -1 \iff \lg x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right) \iff x \in \left[\frac{1}{\sqrt[3]{10}}, 1\right)$

iii) $[3\lg x] = [2\lg x] = 0 \iff \lg x \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \iff x \in \left[1, \sqrt[3]{10}\right)$

iv) $[3\lg x] = [2\lg x] = 1 \iff \lg x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \iff x \in \left[\sqrt{10}, \sqrt[3]{100}\right)$.

În concluzie, mulţimea soluţiilor ecuaţiei $[3\lg x] = [2\lg x]$ este

$$\left[\frac{1}{\sqrt[3]{100}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt[3]{10}}, \sqrt[3]{10}\right) \cup \left[\sqrt{10}, \sqrt[3]{100}\right).$$