SOLUȚIE

Problema 4.

Determinați funcțiile strict crescătoare $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ cu proprietatea că

$$f\left(n+f\left(n\right)\right)=2f\left(n\right),$$

pentru orice număr natural nenul n.

Vasile Pop, R.M.T.2/2010

Soluție:

Deoarece $f\left(1\right)\geq 1$ și f este strict crescătoare vom avea $f\left(n\right)\geq n, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Relația din enunț se scrie echivalent

$$f\left(n+f\left(n\right)\right)-\left(n+f\left(n\right)\right)=f\left(n\right)-n$$

și considerând funcția $g:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N},\ g\left(n\right)=f\left(n\right)-n$, obținem relația

(1) $$g\left(n+f\left(n\right)\right)=g\left(n\right),\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Avem: $f\left(n+1\right)>f\left(n\right)\ \Rightarrow\ g\left(n+1\right)+n+1>g\left(n\right)+n\ \Rightarrow\ g\left(n+1\right)\geq g\left(n\right), \forall n\in\mathbb{N}^*$, deci funcția g este crescătoare. Ținând cont de relația (1) deducem că g este funcție constantă și atunci $f\left(n\right)=n+c,\ c\in\mathbb{N}$, funcții care verifică relația din enunț.