**Etapa 3, Problema 2**

Stabiliţi dacă există funcţii crescătoare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - 3xy(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

***

**Soluţie.**

Ipoteza este echivalentă cu

$$f(x+y) + (x+y)^3 = f(x) + x^3 + f(y) + y^3, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Cu notaţia $g(x) = f(x) + x^3, x \in \mathbb{R}$, deducem că funcţia $g$ verifică ecuaţia funcţională Cauchy. În plus, observăm că $g$ este crescătoare. Folosind Teorema 4 din lecţie, rezultă că există $a \geq 0$ astfel încât

$$g(x) = ax, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Obţinem că

$$f(x) = ax - x^3, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Însă această funcţie nu este crescătoare pe $\mathbb{R}$, prin urmare nu există funcţii cu proprietatea din enunţ.