Problema 4
Etapa 1
Clasa a a VIII -a

Problema 4

Pe planul triunghiului oarecare ABC se ridică perpendicularele AA_1 , BB_1 respectiv CC_1 de aceeași parte, astfel încât au loc egalitățile: $AA_1 = BC$, $BB_1 = CA$ și $CC_1 = AB$. Dacă notăm cu H ortocentrul triunghiului ABC și cu O_1 centrul cercului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$, demostrați că dreapta HO_1 este prpendiculară pe planul $(A_1B_1C_1)$.

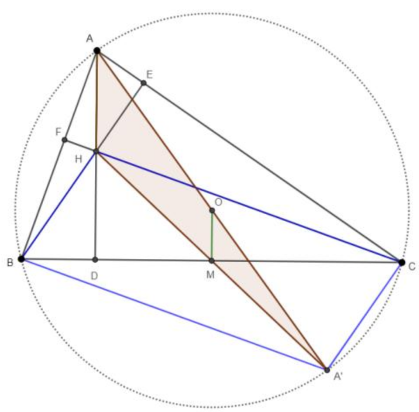
(Folclor)

Soluție. Vom folosi următoarea lemă foarte utilă:

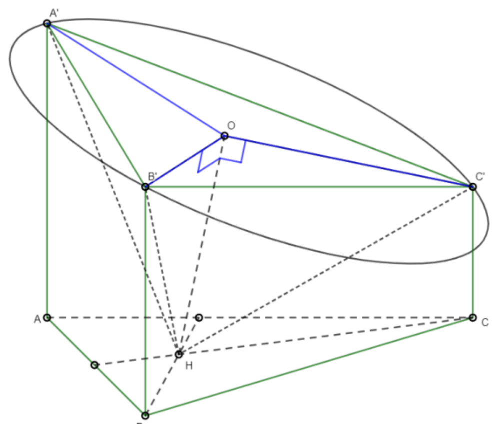
Lemă. În orice triunghi ABC are loc relația:

$$AH = 2R \cdot \cos A,$$

unde R notează lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.



Demonstrația lemei. Fie A' punctul diametral opus vârfului A în cercul circumscris triunghiului ABC. Din $BH \perp AC \perp A'C$ și $CH \perp AB \perp A'B$, deduce că patrulaterul BHCA are laturile opuse paralele, deci este paralelogram. Deducem că latura BC și HA' au același mijloc, pe M. Din $OM = R \cos A$, egalitate dedusă din triunghiul dreptunghic BOM, și din (OM) linie mijlocie a triunghiului AHA' rezultă concluzia lemei.



Planul soluției este acela de a verifica egalitatea lungimilor segmentelor HA', HB', HC' după care se demonstrează congruența triunghiurilor HOA' HOB' și HOC' unde O este proiecția lui H pe planul (A'B'C'), de unde are loc OA = OB = OC, adică punctul O este chiar centrul cercului circumscris triunghiului A'B'C'.

Astfel $C'H^2 = HC^2 + CC'^2 = 4R^2 \cos^2 C + c^2 = 4R^2(1- \sin^2 C) + c^2 = 4R^2$, deoarece din teorema sinusului $c = 2R \sin C$. Analog se exprimă BH = 2R și CH = 2R, deci HA'= HB'= HC'. Din cazul ipotenuză-catetă se obține congruența triunghiurilor HOA', HOB' și HOC', deci piramida de vârf H și bază (A'B'C') are muchiile laterale egale. Deci H se proiectează în centrul cercului circuscris acesteia.