

Problema 3. a) Fie P_{AB} , P_{BC} , P_{CD} și P_{DA} puncte pe muchiile (AB) , (BC) , (CD) , respectiv (DA) ale unui tetraedru $ABCD$.

Arătați că planele $(P_{AB}CD)$, (P_{BCDA}) , (P_{CDAB}) și (P_{DABC}) au un punct comun dacă și numai dacă are loc relația

$$\frac{AP_{AB}}{P_{AB}B} \cdot \frac{BP_{BC}}{P_{BC}C} \cdot \frac{CP_{CD}}{P_{CD}D} \cdot \frac{DP_{DA}}{P_{DA}A} = 1.$$

(Teorema lui Ceva în spațiu)

b) Fie P_{AB} , P_{BC} , P_{CD} , P_{DA} , P_{AC} și P_{BD} puncte pe muchiile (AB) , (BC) , (CD) , (DA) , (AC) , respectiv (BD) ale unui tetraedru $ABCD$ cu proprietatea că există

punctele $\{A'\} = BP_{CD} \cap CP_{BD} \cap DP_{BC}$, $\{B'\} = AP_{CD} \cap CP_{DA} \cap DP_{AC}$,

$\{C'\} = AP_{BD} \cap BP_{DA} \cap DP_{AB}$ și $\{D'\} = AP_{BC} \cap BP_{AC} \cap CP_{AB}$.

Demonstrați că dreptele AA' , BB' , CC' și DD' sunt concurente.