

Problemă. Fie a, b, c trei numere naturale astfel încât suma oricăror două dintre ele este multiplu de 13. Arătați că fiecare dintre numere este multiplu de 13.

* * *

Soluție: Vom nota $\mathcal{M}13$ orice multiplu de 13.
Din problemă avem

$$a + b = \mathcal{M}13 \quad (1)$$

$$b + c = \mathcal{M}13 \quad (2)$$

$$c + a = \mathcal{M}13 \quad (3)$$

Adunând cele trei relații obținem

$$2(a + b + c) = \mathcal{M}13.$$

Cum 2 nu este multiplu de 13, rezultă că

$$a + b + c = \mathcal{M}13 \quad (4)$$

Scăzând din (4) pe (2) obținem

$$a = \mathcal{M}13.$$

Scăzând din (4) pe (3) obținem

$$b = \mathcal{M}13.$$

Scăzând din (4) pe (1) obținem

$$c = \mathcal{M}13.$$

În concluzie, fiecare dintre numere este multiplu de 13.