COMENTARII FAZA LOCALĂ 2012, BUCUREŞTI

ABSTRACT. Comments on some of the problems presented at the Local Round of the National Mathematics Olympiad 2012, Bucharest.
Data: 19 februarie 2012.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere

Aceste comentarii asupra Fazei Locale a Olimpiadei de Matematică 2012, Bucureşti, reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectată a probelor de concurs.

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

2. Clasa a V-a

Subiectul (1)**.** *Se consideră numerele naturale* a *şi* b, $a > b > 0$*. Se ştie că, împărţind numărul* a *la numărul* $a - b$ *se obţine câtul* 2 *şi restul* 3*.*

a) Dacă $a = 2011$*, determinaţi câte valori posibile are poate lua diferenţa* $a - b$*;*

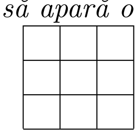
b) Determinaţi câtul şi restul împărţirii numărului b *la numărul* $a - b$*.*

prelucrare *Gazeta Matematică* nr. 3/2011

Soluţie. a) Întrebarea este pernicioasă, de parcă ar conta cele trei valori ale deîmpărţitului, câtului, sau restului. O împărţire $n = qm + r$ prin algoritmul lui Euclid, unde cele trei $n, q \neq 0, r$, sunt fixate, are o singură soluţie $m = \dfrac{n-r}{q}$ (desigur, dacă cele trei valori sunt consistente – nu rămâne de verificat decât că $2 \mid 2011 - 3$).

b) Oare se pot (trebuie) a fi folosite valorile de la punctul a) ? Irelevant, căci $a = 2(a - b) + 3$, cu $3 < a - b$, şi $b = q(a - b) + r$, cu $0 \leq r < a - b$. Prin scădere, $a - b = (2 - q)(a - b) + (3 - r)$, deci $(a - b)|q - 1| = |3 - r|$, de unde, deoarece $|3 - r| < a - b$, rezultă $r = 3$ şi $q = 1$. □

Subiectul (4)**.** *Se consideră numerele naturale* a *şi* b*, astfel încât* $1 < a < b$*. Se completează fiecare dintre cele nouă pătrăţele ale pătratului din figura alăturată cu numerele* 1*,* a *şi* b *astfel încât fiecare dintre acestea să apară o singură dată pe fiecare linie şi pe fiecare coloană a pătratului.*



a) Arătaţi că două dintre colţurile opuse ale pătratului sunt completate cu numere egale;
b) Arătaţi că una dintre diagonalele pătratului este completată cu numere egale;
c) Dacă produsul numerelor de pe fiecare linie, de pe fiecare coloană şi de pe fiecare diagonală este egal cu n, arătaţi că n este cub perfect.

L. Petrescu

Soluţie. Fie $\{x, y, z\} = \{1, a, b\}$. Completăm arbitrar prima linie $\begin{array}{|c|c|c|}\hline x & y & z \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$

A doua linie nu poate fi decât $\begin{array}{|c|c|c|}\hline x & y & z \\ \hline y & z & x \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$ sau $\begin{array}{|c|c|c|}\hline x & y & z \\ \hline z & x & y \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$, ceea ce induce ca singure posibilităţi $\begin{array}{|c|c|c|}\hline x & y & z \\ \hline y & z & x \\ \hline z & x & y \\ \hline \end{array}$ sau $\begin{array}{|c|c|c|}\hline x & y & z \\ \hline z & x & y \\ \hline y & z & x \\ \hline \end{array}$. În ambele cazuri, a) două dintre colţurile opuse ale pătratului sunt completate cu numere egale; b) una dintre diagonalele pătratului este completată cu numere egale.

Soluţia oficială se prevalează de principiul cutiei, şi în general se complică în mod cu totul inutil.

c) Produsul n al elementelor de pe diagonala de la punctul b) este deci un cub perfect, şi **acest lucru este suficient pentru a satisface întrebarea**. Desigur, produsul elementelor de pe orice linie sau coloană, sau cealaltă diagonală, este $n = ab$. Aşa cum este enunţată, problema **nu cere** să se arate că aşa ceva **chiar** se poate întâmpla. Sigur, cubul perfect nu poate fi nici 1, căci $ab > 1^3$, nici b^3, căci $ab < b^3$; singura posibilitate este să fie a^3, şi atunci avem nevoie ca $n = ab = a^3$, deci $b = a^2$. Din acest motiv, ultimele două puncte din barem sunt abuzive, căci se referă la un lucru care n-a fost niciodată **cerut ca atare** în problemă. Nu îşi avea deci locul, în soluţia oficială, expresia **argumentarea faptului că există triplete de numere care îndeplinesc condiţiile problemei**; dacă propunătorul nu stăpâneşte limba prin care să fi cerut acest lucru, la punctul c), nu este vina competitorului că nu a adresat această chestiune ... $\square$

3. Clasa a VI-a

Subiectul (2)**.** *a) Daţi un exemplu de un număr raţional mai mare decât $\dfrac{2011}{2012}$ şi mai mic decât $\dfrac{2012}{2013}$. Justificaţi răspunsul.*
b) Calculaţi suma tuturor numerelor raţionale de forma $r = \dfrac{n}{990}$, $n \in \mathbb{N}$, cu proprietatea că $0,(97) < r < 0,99$.

* * *

Soluţie. a) Putem lua la fel de bine $r = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2011}{2012} + \dfrac{2012}{2013}\right)$ (sau media armonică), ca şi $r = \dfrac{2011+2012}{2012+2013}$, căci pentru $\dfrac{p}{q} < \dfrac{r}{s} \in \mathbb{Q}_+^*$ avem desigur $\dfrac{p}{q} < \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p}{q} + \dfrac{r}{s}\right) < \dfrac{r}{s}$, din definiţia mediei aritmetice, dar şi $\dfrac{p}{q} < \dfrac{p+r}{q+s} < \dfrac{r}{s}$, din definiţia *mediantului*. Cerinţa de **justificare a răspunsului** mi se pare lejer insultătoare.

b) Soluţia oficială are o benignă eroare când, din $\dfrac{9700}{9900} < \dfrac{10n}{9900} < \dfrac{9801}{9900}$, ajunge la $970 < 10n \leq 980$, în loc de evidentul $970 < n \leq 980$. □

Subiectul (3)**.** *Se consideră mulţimea P a pătratelor perfecte. Determinaţi cel mai mic număr de elemente care trebuie extrase din mulţimea P astfel încât, printre numerele extrase, să existe cu siguranţă două care să aibă suma sau diferenţa divizibilă cu* 10*.*

L. Petrescu

Soluţie. Cumva, în vârtejul luptei, numerele extrase devin **bile**, ha ha! Soluţia oficială foloseşte ultima cifră a unui pătrat perfect (în fapt, restul la împărţirea sa prin 10), care trebuie a fi în mulţimea $\{0,1,4,5,6,9\}$, dar se opreşte abrupt, clamând că pentru 5 numere extrase se obţine rezultatul. Sfiala în a da şi soluţia este ciudată; grupând cifrele $\{0\},\{1,9\},\{4,6\},\{5\}$, se vede imediat că de îndată ce se aleg 5 numere, ultimele cifre a două dintre ele se vor găsi cu necesitate într-o aceeaşi grupă, şi atunci sau sunt egale, şi deci **diferenţa** celor două numere se divide prin 10, sau, dacă nu, atunci **suma** celor două numere se divide prin 10. □

4. Clasa a VII-a

Subiectul (1)**.** *a) Demonstraţi că, oricare ar fi numerele naturale nenule a, b cu $a < b$, are loc inegalitatea $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{1}{ab}$.*

b) Considerăm primele zece numere naturale prime luate în ordine strict crescătoare, $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$. Demonstraţi că $\dfrac{1}{p_1p_2} + \dfrac{1}{p_2p_3} + \cdots + \dfrac{1}{p_9p_{10}} < \dfrac{14}{29}$.

* * *

Soluţie. b) Toate bune şi frumoase, dar cum $p_{k+1} - p_k \geq 2$ pentru orice $k \geq 2$, se putea obţine la fel de uşor $\dfrac{1}{p_1p_2} + \dfrac{1}{p_2p_3} + \cdots + \dfrac{1}{p_9p_{10}} < \dfrac{1}{p_1p_2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p_2} - \dfrac{1}{p_3}\right) + \cdots + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p_9} - \dfrac{1}{p_{10}}\right) = \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3} - \dfrac{1}{2\cdot 29} = \dfrac{55}{174} < \dfrac{1}{3} < \dfrac{14}{29}$.

În mod caraghios, telescoparea simplă din soluţia oficială ajunge subit la $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{29} = \dfrac{14}{29}$, de fapt corect fiind $\dfrac{27}{58} < \dfrac{28}{58} = \dfrac{14}{29}$. Simplul fapt că s-a simţit nevoia să se recurgă la această ultimă inegalitate este simptomatic ... □

Subiectul (2)**.** *Considerăm pătratul $ABCD$ şi punctele E pe latura BC şi F pe latura CD, aşa ca $\angle BAE = 15°$ şi $\angle DAF = 30°$. Determinaţi $\angle AEF$.*

Gazeta Matematică nr. 7-8-9/2011

Soluţie Alternativă. Fie pătratul $ABCD$ în poziţia din figura din soluţia oficială. Vom construi deasupra sa pătratul $CDA'B'$, la dreapta sa pătratul $BCD'A''$, şi între ele pătratul $CD'A'''B'$. Fie punctul E pe latura BC astfel ca $\angle BAE = 15°$; atunci evident şi $\angle BA''E = 15°$.

Dar este o configuraţie cunoscută că în aceste condiţii triunghiul $A'EA'''$ este echilateral, şi deci $\angle AEA' = \angle EAA' = 75°$. Configuraţia este clasică, şi reprezintă o parte dintr-un dodecagon regulat. Aceasta este de altfel şi justificarea acestei soluţii alternative, pentru a vedea că problema decurge dintr-o configuraţie cunoscută.

Fie F intersecţia laturii CD cu $A'E$. Atunci $\angle DAF = \angle DA'F = 30°$, deci punctul F este cel din problemă, iar $\angle AEF = \angle AEA' = 75°$. $\square$

5. Clasa a VIII-a

Subiectul (3)**.** *a) Arătaţi că, pentru orice numere reale $x, y > 0$, este adevărată inegalitatea $\dfrac{2}{x+y} - \dfrac{1}{xy} \leq 1$;*

b) Demonstraţi că, pentru orice numere reale $a, b, c > 0$ pentru care avem $a + b + c = 1$, este adevărată inegalitatea $\dfrac{1+a}{b+c} + \dfrac{1+b}{c+a} + \dfrac{1+c}{a+b} \leq \dfrac{1}{abc}$.

Gazeta Matematică nr. 12/2011

Soluţie. Semnele egal nu se ating niciodată; mai rău – inegalităţile sunt extrem de slabe. Este cel puţin *răutăcios* de a folosi în concurs această formă extrem de slabă, dar prezentată ca şi cum ar putea avea caz de egalitate (o convenţie nescrisă este că folosirea semnului $\leq$ presupune că egalitatea poate fi atinsă).

b) se poate obţine şi fără *cârja* oferită de punctul a). Putem demonstra $\dfrac{1+c}{a+b} \leq \dfrac{1}{4ab}$, căci revine la $4ab + 4ab(1-a-b) \leq a+b$, sau, echivalent, la $8ab \leq (a+b)(4ab+1)$, adevărat căci din inegalitatea mediilor avem $(a+b)(4ab+1) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{4ab} = 8ab$. Similar şi $\dfrac{1+a}{b+c} \leq \dfrac{1}{4bc}$, $\dfrac{1+b}{c+a} \leq \dfrac{1}{4ca}$, şi cum $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca}\right) = \dfrac{a+b+c}{4abc} = \dfrac{1}{4abc}$, obţinem inegalitatea cerută, cu factorul suplimentar $\dfrac{1}{4}$. Nici această inegalitate nu este însă strânsă, căci cazurile de egalitate $a = b = \dfrac{1}{2}$, etc. nu se pot obţine simultan.

Cea mai bună inegalitate ce am putut obţine este

$$\frac{1+a}{b+c}+\frac{1+b}{c+a}+\frac{1+c}{a+b}\leq \frac{1}{6abc}+\frac{3}{2},$$

cu caz de egalitate pentru $a=b=c=\frac{1}{3}$. Într-adevăr $\frac{1}{6abc}+\frac{3}{2}<\frac{1}{4abc}$, căci revine la $abc<\frac{1}{18}$, şi avem $1=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$, deci în fapt $abc\leq \frac{1}{27}<\frac{1}{18}$. □

Subiectul (4)**.** *Un patrulater convex are lungimile laturilor exprimate prin numere naturale astfel încât lungimea fiecărei laturi să reprezinte un divizor al sumei lungimilor celorlalte trei laturi. Demonstraţi că printre laturile patrulaterului există două care au aceeaşi lungime.*

* * *

Soluţie. În fine, o problemă drăguţă! poate doar cam dificilă pentru faza aceasta a olimpiadei. Ea provine din testul 2 de selecţie pentru juniori din anul 2001.

Să presupunem că un poligon convex cu $n\geq 4$ laturi de lungimi numere naturale $0<a_1<a_2<\cdots<a_n$ are proprietatea că $a_j \mid \sum_{i=1}^{n} a_i$ pentru orice $1\leq j\leq n$. Atunci $\sigma=\sum_{i=1}^{n} a_i = ka_n$, pentru un $3\leq k\leq n-1$. Vom avea şi $\sigma=\alpha_j a_j$, pentru $1\leq j\leq n-1$, cu evident $\alpha_{n-1}>\cdots>\alpha_2>\alpha_1\geq k+1$, deci $\alpha_j\geq k+j$.

Dar trebuie $\frac{k-1}{k}=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\alpha_j}\leq \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{k+j}$, deci $1\leq \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{k+j}\leq \sum_{m=3}^{n+2}\frac{1}{m}$. Pentru $n=4$ acest lucru este fals, căci $1>\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}$, deci presupunerea făcută este absurdă, şi **două dintre lungimile laturilor trebuie să fie egale**. Pentru $n\geq 5$ inegalitatea poate fi obţinută, şi într-adevăr, având $1=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{20}$, un pentagon convex cu lungimile laturilor $3<10<12<15<20$ există (acest pentagon este unicul posibil cu proprietatea dată, până la un factor întreg de dilatare).

Mai mult, folosind identitatea $\frac{1}{N}=\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N(N+1)}$, putem exhiba un astfel de poligon convex pentru orice $n\geq 6$. Toate soluţiile sunt date de reprezentările $1=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$ în fracţii egiptene, cu $3\leq x_1<x_2<\cdots<x_n$. □

6. Încheiere

Perfecţiunea nu poate fi niciodată atinsă, se pare, şi numai un nebun utopic, un *don Quixote* ca mine, mai poate crede în realizarea ei. Dar olimpiada ar trebui fi pregătită mult mai din timp, cu problemele circulând între specialişti competenţi, care vor fi avut suficient timp la dispoziţie pentru a descoperi eventualele defecte, şi a crea o probă balansată şi relevantă. Subiectele au fost *curăţele*, şi una peste alta, selecţia pentru etapa următoare nu cred că a lăsat pe dinafară copii cu adevărat valoroşi.