Problema 4. Numerele reale x și y verifică inegalitatea $2\lg x+\lg(1-x)\geq 3\lg y+\lg(y-1)$. Demonstrați că $x^3+y^3<2$.

Olimpiadă, Republica Moldova

Soluție:

Impunând condiții de existență, obținem $x\in(0,1)$ și $y\in(1,\infty)$. Inegalitatea din ipoteză se scrie echivalent $x^2(1-x)\geq y^3(y-1)$ sau $x^2+y^3\geq x^3+y^4$. (1)

Vom arăta că are loc inegalitatea $x+y^2>x^2+y^3$. (2)

Prin absurd, presupunem că $x+y^2\leq x^2+y^3$. Ținînd seama de relația (1), obținem $x+x^3+y^2+y^4\leq 2x^2+2y^3$ sau $x(1-x)^2+y^2(1-y)^2\leq 0$, contradicție. Rezultă că inegalitatea (2) este adevărată.

Aplicând (1) și (2), obținem:

$$1+x^2+1+y^4>2x+2y^2=2\left(x+y^2\right)>2\left(x^2+y^3\right)=\left(x^2+y^3\right)+\left(x^2+y^3\right)\geq x^2+y^3+x^3+y^4,$$

de unde rezultă $x^3+y^3<2$.