Etapa 4, Problema 2

Determinați numerele reale $x \in (-2, \infty)$ cu proprietatea că

$$(2+x)^{\log_2 3} = 1 + (3+x)^{\log_3 2}.$$

Virgil Nicula

Soluție.

Ecuația din enunț poate fi scrisă sub forma

$$3^{\log_2(2+x)} = 1 + 2^{\log_3(3+x)}.$$

Cu notațiile $\log_2(2+x) = a$ și $\log_3(3+x) = b$, obținem că $3^a = 1 + 2^b$, iar $x = 2^a - 2 = 3^b - 3$, deci $1 + 2^a = 3^b$. Adunând membru cu membru aceste egalități și scăzând 1 din ambii membri, rezultă că $f(a) = f(b)$, unde funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin $f(x) = 2^x + 3^x$. Cum f este strict crescătoare, deci injectivă, deducem că $a = b$.

Rămâne să rezolvăm ecuația $3^a = 1 + 2^a$. Împărțind ambii membri prin 3^a, obținem că $g(a) = 1$, unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x$. Evident că g este strict descrescătoare, deci injectivă, iar $g(1) = 1$. Rezultă că $a = 1$, prin urmare $x = 0$ este unica soluție a ecuației date.