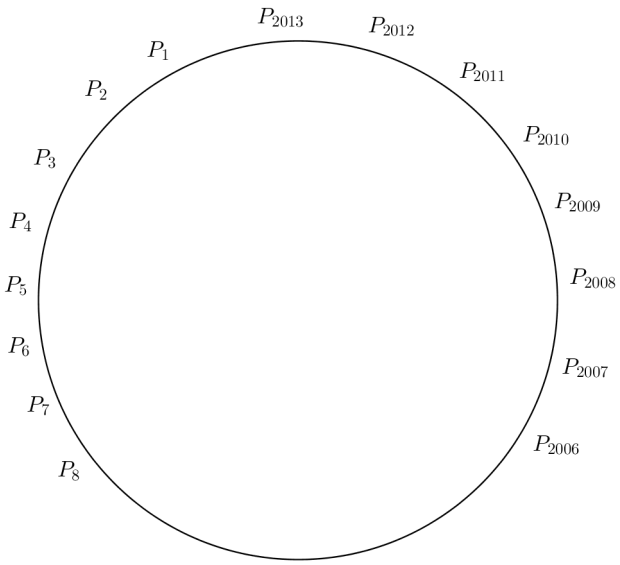
Problema 2. Lui Gigel îi place matematica şi să coloreze, astfel că într-o zi a desenat un cerc şi a scris numerele de la 1 la 2013 pe circumferinţa lui, într-o ordine oarecare. Apoi le-a colorat cu roşu, din 5 în 5, pornind de la un număr oarecare, până când a ajuns din nou la numărul de la care a pornit. A ales alt număr şi, începând cu acesta, le-a colorat cu verde, din 8 în 8, până a revenit la numărul de la care a pornit. Aflaţi cu ce culoare este colorat numărul 2013.

(Un număr colorat de două ori va avea ultima culoare folosită)

Mihai Bunget, Târgu Jiu

Soluţie: Deoarece "*Un număr colorat de două ori va avea ultima culoare folosită*" nu are importanţă care dintre numere sunt colorate cu roşu şi care rămân necolorate.

Aşadar, ne ocupăm de ce se întâmplă la colorarea cu verde.



În figura de mai sus am notat P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, ..., P_{2012}, P_{2013} câteva dintre poziţiile ocupate de numerele de la 1 la 2013, pe cerc. (P_1 nu reprezintă în mod obligatoriu pe 1 şi nici celelalte P-uri nu reprezintă un număr anume).

Vom arăta că în final toate poziţiile, deci toate numerele, vor fi colorate în verde.

Dacă vom începe cu colorarea poziţiei P_1, vom colora poziţia P_{8+1}, apoi P_{8+8+1}, adică $P_{8\cdot 2+1}$ şi aşa mai departe, toate poziţiile de forma $P_{8\cdot k+1}$.

În această situaţie, ultima poziţie din cele 2013, care va fi colorată este P_{2009} deoarece $8 \cdot k + 1 \leq 2013$ implică $8 \cdot k \leq 2012$, de unde $k \leq 251$ şi de aici $8 \cdot 251 + 1 = 2009$.

Pornind de la poziţia P_2 vom colora toate poziţiile de forma $P_{8\cdot k+2}$, ultima poziţie colorată fiind P_{2010}.

Pornind de la poziţia P_3 vom colora toate poziţiile de forma $P_{8\cdot k+3}$, ultima poziţie colorată fiind P_{2011}.

Pornind de la poziţia P_4 vom colora toate poziţiile de forma $P_{8\cdot k+4}$, ultima poziţie colorată fiind P_{2012}.

Pornind de la poziţia P_5 vom colora toate poziţiile de forma $P_{8\cdot k+5}$, ultima poziţie colorată fiind P_{2013}.

Pornind de la poziţia P_6 vom colora toate poziţiile de forma $P_{8\cdot k+6}$, ultima poziţie colorată fiind P_{2006}.

Pornind de la poziţia P_7 vom colora toate poziţiile de forma $P_{8\cdot k+7}$, ultima poziţie colorată fiind P_{2007}.

Pornind de la poziţia P_8 vom colora toate poziţiile de forma $P_{8\cdot k}$, ultima poziţie colorată fiind P_{2008}.

Acum, pornind din poziţia P_1 vom ajunge în poziţia P_{2009},trecând prin toate poziţiile de forma $8 \cdot k + 1$.De aici vom ajunge la P_4.

Din P_4 vom ajunge în P_{2012}, trecând prin toate poziţiile de forma $8 \cdot k + 4$. De aici vom ajunge la P_7.

Din P_7 vom ajunge în P_{2007}, trecând prin toate poziţiile de forma $8 \cdot k + 7$. De aici vom ajunge la P_2.

Din P_2 vom ajunge în P_{2010}, trecând prin toate poziţiile de forma $8 \cdot k + 2$. De aici vom ajunge la P_5.

Din P_5 vom ajunge în P_{2013}, trecând prin toate poziţiile de forma $8 \cdot k + 5$. De aici vom ajunge la P_8.

Din P_8 vom ajunge în P_{2008}, trecând prin toate poziţiile de forma $8 \cdot k$. De aici vom ajunge la P_3.

Din P_3 vom ajunge în P_{2011}, trecând prin toate poziţiile de forma $8 \cdot k + 3$. De aici vom ajunge la P_6.

Din P_6 vom ajunge în P_{2006}, trecând prin toate poziţiile de forma $8 \cdot k + 6$. De aici vom ajunge la P_1.

Aşadar, ne-am întors la P_1 ceea ce înseamnă că am colorat toate poziţiile.

În concluzie, numărul 2013, indiferent unde se va afla va fi colorat în verde.