Problema 4. Determinați numerele întregi *a, b, c, x, y, z* care verifică sistemul $\begin{cases} x^3+2y^3=a^3 \\ 5y^3+3z^3=b^3 \\ 4z^3+6x^3=c^3 \end{cases}$.

***

Soluție. Observăm că $a=b=c=x=y=z=0$ verifică sistemul. Presupunem că există o soluție care nu are toate componentele nule.

Dacă $x=0$, atunci prima ecuație devine $a^3=2y^3$, deci $a=y=0$. Înlocuind în cea de-a doua ecuație, obținem $b^3=3z^3$, deci $b=z=0$ și din cea de-a treia ecuație rezultă $c=0$, contradicție. Așadar $x\neq 0$. Analog se arată că $y\neq 0$ și $z\neq 0$. Alegem o soluție (x, y, z, a, b, c) cu suma $|x|+|y|+|z|+|a|+|b|+|c|$ minimă.

Adunând toate ecuațiile, obținem $7\left(x^3+y^3+z^3\right)=a^3+b^3+c^3$, deci $7\,|\,a^3+b^3+c^3$.

Resturile posibile prin împărțirea la 7 ale numerelor naturale a^3, b^3 și c^3 aparțin mulțimii $\{0, 1, 6\}$, așadar pentru ca $7\,|\,a^3+b^3+c^3$ este necesar ca măcar unul dintre numerele a^3, b^3 și c^3 (sau toate trei numerele) să se dividă cu 7, deci ca măcar unul dintre numerele *a, b* și *c* (sau toate trei numerele) să se dividă cu 7.

Dacă $7\,|\,a$, atunci $7\,|\,x^3+2y^3$. Dacă $7\nmid x$ și $7\nmid y$, atunci resturile posibile prin împărțirea la 7 ale numerelor x^3 și y^3 aparțin mulțimii $\{1, 6\}$, deci restul împărțirii la 7 a numărului x^3+2y^3 aparține mulțimii $\{1, 4, 6\}$, contradicție. Rezultă ușor că $7\,|\,x$ și $7\,|\,y$, deci $7\,|\,b$ și $7\,|\,c$. În consecință, obținem soluția $\left(\frac{x}{7}, \frac{y}{7}, \frac{z}{7}, \frac{a}{7}, \frac{b}{7}, \frac{c}{7}\right)$, a cărei sumă a modulelor este $\frac{|x|+|y|+|z|+|a|+|b|+|c|}{7}$, deci este mai mică decât suma minimă a modulelor componentelor unei soluții, fals.

Așadar presupunerea făcută este falsă, deci singura soluție este $a=b=c=x=y=z=0$.