

Clasa a X-a - Etapa 5

Problema 2. Demonstrați că $(4n)!$ este divizibil cu $2^{3n} \cdot 3^n$, pentru orice număr $n \in \mathbb{N}$.

Soluție. Avem $2^3 \cdot 3 = 24 = 4!$. Atunci

$$\begin{aligned} \frac{(4n)!}{2^{3n} \cdot 3^n} &= \frac{(4n)!}{(4!)^n} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(4n-4k)!}{4! \cdot (4n-4k-4)!} \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} C_{4n-4k}^4 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$