

**Problema 2.**

Arătați că ecuația  $5^x + 6^{\frac{1}{x}} + 7^{\frac{x+1}{x}} = 58$  nu admite soluții în mulțimea numerelor reale.

\*\*\*

**Soluție.**

Dacă  $x \leq 0$ , avem  $5^x \leq 1$ ,  $6^{\frac{1}{x}} \leq 1$  și  $7^{\frac{x+1}{x}} \leq 1$ , deci  $5^x + 6^{\frac{1}{x}} + 7^{\frac{x+1}{x}} \leq 3$ . Rezultă că ecuația nu are soluții  $x \in (-\infty, 0]$ , (1)

Dacă  $x > 0$ , avem  $5^x + 6^{\frac{1}{x}} + 7^{\frac{x+1}{x}} > 5^x + 5^{\frac{1}{x}} + 7^{\frac{x+1}{x}}$ , (2). Folosind inegalitatea mediilor, obținem  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ , deci  $7^{\frac{x+1}{x}} \geq 7^2 = 49$  și  $5^x + 5^{\frac{1}{x}} \geq 2 \cdot \sqrt{5^{\frac{x+1}{x}}} \geq 2\sqrt{5^2} = 10$ . Din (2) rezultă că  $5^x + 6^{\frac{1}{x}} + 7^{\frac{x+1}{x}} \geq 10 + 49 = 59 > 58$ , prin urmare ecuația nu are soluții  $x \in (0, \infty)$ , (3).

Din (1) și (3) deducem că ecuația  $5^x + 6^{\frac{1}{x}} + 7^{\frac{x+1}{x}} = 58$  nu admite soluții în  $\mathbb{R}$ .