

Problema 3. Fie 3 cutii, una cu a bile albe, una cu r bile roșii și ultima cu n bile negre. La fiecare pas se iau 2 bile de culori diferite și se înlocuiesc cu o bilă de a treia culoare. Aflați condițiile pe care trebuie să le îndeplinească a, r și n astfel încât la sfârșit să rămână o singură bilă și precizați culoarea ei.

Soluție: Se observă că după fiecare pas, fiecare dintre numerele a, r și n își schimbă paritatea. (două dintre ele scad cu 1, iar una crește cu 1).

Dacă inițial toate trei au aceeași paritate, după fiecare etapă, a, r și n vor avea în continuare aceeași paritate, deci este imposibil ca la final să se obțină 2 cutii cu 0 bile și una cu 1 bilă. (pentru că 0, 0 și 1 nu au toate aceeași paritate).

Deci inițial, unul dintre a, r și n are paritatea diferită de celelalte două. În continuare vom arăta că aceasta este singura condiție pe care trebuie să o îndeplinească cele 3 numere.

Putem presupune fără a restrânge generalitatea că a are paritatea diferită de r și n . Cum 1 are paritate diferită de 0 și 0, înseamnă că bila care va rămâne la sfârșit va fi de culoare albă.

Demonstrăm acum că jocul este finit. Într-adevar, dacă ne uităm la numărul total de bile din cele 3 cutii, acesta scade cu 1 la fiecare pas. Cum inițial pornim cu $a + r + n$ bile, jocul nu poate continua la infinit (altfel, după un număr de pași $> a + r + n$ vom avea un număr negativ de bile, ceea ce este imposibil).

Deci jocul se oprește când am obținut 2 cutii goale și una cu cel puțin o bilă (va fi cea care conține bile albe).

Considerăm o strategie optimă, o alegere a mutărilor astfel încât la sfârșit să rămână 0 bile roșii și negre și x bile albe, cu x minim.

Presupunem prin reducere la absurd că pentru un anumit a, r , și n inițiale, jocul se termină cu $x \geq 2$ bile albe și 0 bile negre și roșii. Înseamnă că la pasul anterior au fost câte o bilă roșie și una neagră (care au fost înlocuite cu o bilă albă) și $x - 1$ bile albe. Deci se puteau lua o bila albă și una roșie și să se înlocuiască cu una neagră și jocul ar fi continuat și am fi obținut un x mai mic, contradicție

Deci înseamnă că jocul se termină când mai rămâne o singură bilă, aceasta fiind albă.