Soluție problema 2.

Vom demonstra afirmația prin inducție. Pentru $n=1$ afirmația este evident adevărată (luăm $a_1=1$).

În continuare, aplicând identitatea paralelogramului $\left|\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\right|^2+\left|\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}\right|^2=2\left(\left|\overrightarrow{v_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{v_2}\right|^2\right)$, rezultă că $\left|\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\right|^2\geq\left|\overrightarrow{v_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{v_2}\right|^2$ sau $\left|\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}\right|^2\geq\left|\overrightarrow{v_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{v_2}\right|^2$, deci afirmația este adevărată și pentru $n=2$.

Presupunem afirmația adevărată pentru un $n\in\mathbb{N}^*$ apoi demonstrăm că este adevărată pentru $n+1$. Considerăm $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_n},\overrightarrow{v_{n+1}}$ vectori din plan. Deoarece afirmația este adevărată pentru $n=2$ deducem că există $b_1,b_2\in\{1,-1\}$ așa încât $\left|b_1\overrightarrow{v_1}+b_2\overrightarrow{v_2}\right|^2\geq\left|\overrightarrow{v_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{v_2}\right|^2$. Aplicând ipoteza de inducție pentru vectorii $b_1\overrightarrow{v_1}+b_2\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3},\ldots,\overrightarrow{v_n},\overrightarrow{v_{n+1}}$ rezultă că există numerele $c_1,a_3,a_4,\ldots,a_{n+1}\in\{1,-1\}$ astfel încât $\left|c_1\left(b_1\overrightarrow{v_1}+b_2\overrightarrow{v_2}\right)+a_3\overrightarrow{v_3}+\ldots+a_{n+1}\overrightarrow{v_{n+1}}\right|^2\geq\left|b_1\overrightarrow{v_1}+b_2\overrightarrow{v_2}\right|^2+\left|\overrightarrow{v_3}\right|^2+\ldots+\left|\overrightarrow{v_{n+1}}\right|^2\geq\left|\overrightarrow{v_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{v_2}\right|^2+\ldots+\left|\overrightarrow{v_{n+1}}\right|^2$.

Luând $a_1=c_1b_1$ și $a_2=c_1b_2$ obținem că există $a_1,a_2,\ldots,a_{n+1}\in\{1,-1\}$ asfel încât $\left|a_1\overrightarrow{v_1}+a_2\overrightarrow{v_2}+\ldots+a_{n+1}\overrightarrow{v_{n+1}}\right|^2\geq\left|\overrightarrow{v_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{v_2}\right|^2+\ldots+\left|\overrightarrow{v_{n+1}}\right|^2$, adică afirmația este adevărată și pentru $n+1$.