Etapa 7, Problema 1

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și numerele $a_1, a_2, ..., a_n \in (0, \infty)$. Pentru fiecare $k \in \{2, 3, ..., n\}$, definim numerele s_k prin

$$s_k = a_1 + a_2 + ... + a_k - k(a_1 a_2 ... a_k)^{\frac{1}{k}}.$$

a) Demonstrați că, oricare ar fi $k \in \{2, 3, ..., n-1\}$, avem $s_{k+1} \geq s_k$.

b) Arătați că $a_1 + a_2 + ... + a_n - n(a_1 a_2 ... a_n)^{\frac{1}{n}} \geq \max\limits_{1 \leq i < j \leq n} \left(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j}\right)^2$.

***

Soluție.

a) Observăm că

$$s_{k+1} - s_k = a_k - (k+1)(a_1 a_2 ... a_k a_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} + k(a_1 a_2 ... a_k)^{\frac{1}{k}} \geq 0,$$

deoarece

$$\frac{a_k + k(a_1 a_2 ... a_k)^{\frac{1}{k}}}{k+1} \geq \sqrt[k+1]{a_k \left((a_1 a_2 ... a_k)^{\frac{1}{k}}\right)^k} = (a_1 a_2 ... a_k a_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}.$$

b) Fiind date numerele $a_1, a_2, ..., a_n \in (0, \infty)$, putem considera că

$$\max_{1 \leq i < j \leq n} \left(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j}\right)^2 = \left(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}\right)^2$$

(în caz contrar, renumerotăm numerele). Atunci $s_n \geq s_2$, de unde rezultă concluzia problemei.