Problemă. Numerele naturale a, b, c, d verifică relaţia

$$2^{a+b} + 2^{b+c} + 2^{c+d} + 2^{d+a} = 25$$

Calculaţi $a + b + c + d$.

* * *

Soluţie. Relaţia din enunţ se mai scrie

$$2^a \cdot 2^b + 2^b \cdot 2^c + 2^c \cdot 2^d + 2^d \cdot 2^a = 25$$

sau

$$2^b \cdot (2^a + 2^c) + 2^d \cdot (2^a + 2^c) = 25$$

de unde

$$(2^a + 2^c) \cdot \left(2^b + 2^d\right) = 25$$

Numărul 25 poate fi scris $1 \cdot 25$ sau $5 \cdot 5$. Cum niciuna dintre parantezele de mai sus nu poate fi egală cu 1 rezultă

$$2^a + 2^c = 5 \text{ şi } 2^b + 2^d = 5$$

În relaţia $2^a + 2^c = 5$, membrul stâng este aparent un număr par, iar membrul drept este clar număr impar. Înseamnă că 2^a sau 2^c trebuie să fie egal cu 1.

Dacă $2^a = 1$, atunci $2^c = 4$, de unde $a = 0$ şi $c = 2$.

La fel, dacă $2^c = 1$, atunci $2^a = 4$ şi vom obţine $c = 0$ şi $a = 2$.

Din relaţia $2^b + 2^d = 5$ se obţine $b = 0$ şi $d = 2$ sau $d = 0$ şi $b = 2$.

În oricare dintre situaţiile de mai sus obţinem

$$a + b + c + d = 4.$$