Problema 3. Arătați că nu există n, număr natural, pentru care

$$2^n + 3^{n+1} + 9^{n+2} = 20142014$$

* * *

$$2^m + 3^{m+1} + (3^2)^{m+2} = 20142014$$
$$2^m + 3^{m+1} + 3^{2(m+2)} = 20142014$$
$$2^m + 3^{m+1} + 3^{2m+4} = 20142014$$

Notăm cu „U" ultima cifră.

$$U(2^m) = \begin{cases} 6 - m=4K \\ 2 - m=4K+1 \\ 4 - m=4K+2 \\ 8 - m=4K+3 \end{cases} \text{ Unde } K \in \mathbb{N}^* \qquad U(3^{m+1}) = \begin{cases} 3 - m=4K \\ 9 - m=4K+1 \\ 7 - m=4K+2 \\ 1 - m=4K+3 \end{cases} \text{ Unde } K \in \mathbb{N}^*$$

$$U(3^{2(m+2)}) = \begin{cases} 1 - m=4K \\ 9 - m=4K+1 \\ 1 - m=4K+2 \\ 9 - m=4K+3 \end{cases} \text{ Unde } K \in \mathbb{N}^*$$

Dacă $m=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow U(2^m) + U(3^{m+1}) + U(3^{2m+4}) = U(1+3+1) = 5.$

Dacă $m=4K \Rightarrow$

$\Rightarrow U(2^m) + U(3^{m+1}) + U(3^{(2m+4)}) = U(6+3+1) = 0.$

Dacă $m=4K+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow U(2^m) + U(3^{m+1}) + U(3^{(2m+4)}) = U(2+9+9) = 0.$

Dacă $m=4K+2 \Rightarrow$

$\Rightarrow U(2^m) + U(3^{m+1}) + U(3^{(2m+4)}) = U(4+7+1) = 2.$

Dacă $m=4K+3 \Rightarrow$

$\Rightarrow U(2^m) + U(3^{m+1}) + U(3^{(2m+4)}) = U(8+1+9) = 8.$

În toate cazurile de mai sus ultima cifră a sumei ultimelor cifre a lui $2^m + 3^{m+1} + 9^{m+2}$ a fost: pentru $m=0 \Rightarrow 5$, pentru $m=4K \Rightarrow 0$, pentru $m=4K+1 \Rightarrow 0$, pentru $m=4K+2 \Rightarrow 2$, pentru $m=4K+3 \Rightarrow 8$. În niciuna din situații ultima cifră nu este 4, deci nu există „m" număr natural care să îndeplinească aceste condiții.