Etapa 7, Problema 1

Determinați mulțimea tuturor valorilor naturale nenule ale numărului n pentru care se poate construi o mulțime finită $S \subset \mathbb{C}$, formată din n elemente, care îndeplinește condițiile:

1) $|z| = 1$, oricare ar fi $z \in S$;
2) $\sum_{z \in S} z = 0$;
3) $z + w \neq 0$, oricare ar fi $z, w \in S, z \neq w$.

Nicolae Bourbăcuț

Soluție.
Evident $n=1$ convine şi $n=2$ nu convine. Apoi, $n=3$ convine: putem alege, de exemplu, $S = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| z^3 = 1 \right\}$.

Vom arăta că $n=4$ nu convine. Pentru aceasta, să presupunem că ar exista o mulțime cu patru elemente, fie acestea a, b, c, d, având proprietățile din enunț. Deoarece elementele au acelaşi modul, ele sunt afixele vârfurilor unui patrulater inscriptibil. Din $a+b+c+d=0$ deducem că patrulaterul este dreptunghi, ceea ce contrazice proprietatea 3) din ipoteză.

În continuare, demonstrăm că oricare număr $n \geq 5$ este bun. Pentru n impar, alegem $S = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| z^n = 1 \right\}$. Dacă n este par, atunci $n = 3 + (n-3)$. Fie $S_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| z^{n-3} = 1 \right\}$. Este suficient să alegem un număr complex w, de modul 1, astfel încât elementele mulțimii $S_2 = \left\{ wz \middle| z^3 = 1 \right\}$ să fie diferite de cele din S_1 şi, oricare ar fi $x \in S_1$ şi $y \in S_2$, să avem $x + y \neq 0$. Un astfel de număr este $w = \cos\sqrt{2} + i \sin\sqrt{2}$, sau orice alt număr cu argument care nu este de forma $r\pi,\ r \in \mathbb{Q}$.

Cu aceasta, putem concluziona că mulțimea valorilor pe care le poate lua numărul n este $\mathbb{N} \setminus \{0,2,4\}$.