Demonstraţi că prntru $a = 1$, $a = 2$ şi $a = 4$ ecuaţia $x(x + a) = y^2$ nu are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule şi că pentru orice altă valoare a lui $a \in \mathbb{N}^*$ ecuaţia are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule.

Revista Kvant

Soluţie. Înmulţind cu 4, ecuaţia se scrie echivalent $4x^2 + 4xa + a^2 - a^2 = 4y^2$, adică $(2x + a)^2 - (2y)^2 = a^2$, sau $(2x + a - 2y)(2x + a + 2y) = a^2$. Trebuie aşadar să-l scriem pe a^2 ca produs de două numere naturale nenule, de aceeaşi paritate (e clar că trebuie $x < y$ şi că factorii $2x + a - 2y$ şi $2x + a + 2y$ sunt diferiţi dar au aceeaşi paritate). Este evident că nu există asemenea scrieri pentru $a = 1$, $a = 2$ şi $a = 4$.

Să demonstrăm că ecuaţia are soluţii pentru $a \notin \{1, 2, 4\}$ Fie $a = 2^m(2j + 1)$, cu $m, j \in \mathbb{N}$. Dacă $j > 0$, alegem $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $2x + a - 2y = 2^m$ şi $2x + a + 2y = 2^m(2j + 1)^2$. Scăzând cele două relaţii obţinem $y = 2^m(j^2 + j) \in \mathbb{N}^*$, apoi $x = 2^m j^2 \in \mathbb{N}^*$. Aşadar, ecuaţia are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule.

Mai rămâne cazul în care $j = 0$, adică $a = 2^m$, $m \geq 3$. În acest caz alegem $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $2x + a - 2y = 2^{m-1}$ şi $2x + a + 2y = 2^{m+1}$. Scăzând cele două relaţii obţinem $y = 3 \cdot 2^{m-3} \in \mathbb{N}^*$, apoi $x = 2^{m-3} \in \mathbb{N}^*$. Aşadar, şi în acest caz ecuaţia are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule.

În concluzie, ecuaţia are soluţii naturale nenule dacă şi numai dacă $a \notin \{1, 2, 4\}$.

Pentru a demonstra prima parte a afirmaţiei din enunţ se poate proceda şi astfel: dacă $a \leq 4$, atunci $x^2 < x^2 + xa \leq x^2 + 4x < (x+2)^2$, deci y^2 poate fi numai $(x+1)^2$. În acest caz trebuie ca $ax = 2x + 1$, adică $(a - 2)x = 1$, de unde $a - 2 = x = 1$, prin urmare, cu $a \leq 4$, ecuaţia are soluţii numai dacă $a = 3$.