Spunem că un număr este *five-summable* dacă el se poate scrie ca suma a cinci numere de două cifre astfel încât oricare două cifre ale acestor numere să fie distincte.

a) Arătaţi că orice număr *five-summable* este divizibil cu 9.
b) Câte numere *five-summable* există?
c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor *five-summable* ecuaţia $x + y = z$.

Manuela Prajea

Soluţie:
Un număr *five-summable* este de forma $x = \overline{ab}+\overline{cd}+\overline{ef}+\overline{gh}+\overline{i0}$, unde a, b, c, d, e, f, g, h, i sunt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, nu neapărat în această ordine.
a) Avem $x = 10(a+c+e+g+i)+(b+d+f+h)$ şi, cum $a+b+c+d+e+f+g+h+i = 1+2+3+4+5+6+7+8+9$, rezultă $x = 10(a+c+e+g+i)+45-(a+c+e+g+i) = 9(a+c+e+g+i)+45 = 9(n+5)$ unde $n = a+c+e+g+i$. Aşadar, orice număr *five-summable* este divizibil cu 9.
b) Valorile posibile ale numărului n sunt numerele naturale de la 15 la 35:
$15 = 1+2+3+4+5$, $16 = 1+2+3+4+6$, $17 = 1+2+3+4+7$, $18 = 1+2+3+4+8$, $19 = 1+2+3+4+9$, $20 = 1+2+3+5+9$, $21 = 1+2+3+6+9$, $22 = 1+2+3+7+9$, $23 = 1+2+3+8+9$, $24 = 1+2+4+8+9$, $25 = 1+2+5+8+9$, $26 = 1+2+6+8+9$, $27 = 1+2+7+8+9$, $28 = 1+3+7+8+9$, $29 = 1+4+7+8+9$, $30 = 1+5+7+8+9$, $31 = 1+6+7+8+9$, $32 = 2+6+7+8+9$, $33 = 3+6+7+8+9$, $34 = 4+6+7+8+9$. $35 = 5+6+7+8+9$. (Este evident că nu se pot obţine valori mai mici decât 15 sau mai mari decât 35.) Aşadar sunt 21 de numere *five-summable*: $9(n+5)$ cu $n \in \{15, 16, \dots, 35\}$, adică 180, 189, 198, ..., 360.
c) Dacă x, y, z sunt *five-summable* şi verifică $x + y = z$, cum $180 \le x, y, z \le 360$, singura soluţie este $x = y = 180$, $z = 360$.