

**Problema 4.** Numerele naturale de la 1 la  $n$  sunt scrise pe câte un cartonaș. Cartonasele se află pe o masă, cu fața în sus. Ana și Bogdan joacă următorul joc: mai întâi Ana ia unul din cartonașele de pe masă. Apoi, Bogdan ia de pe masă două cartonașe pe care sunt scrise două numere consecutive. Urmează Ana care ia de pe masă trei cartonașe pe care sunt scrise trei numere consecutive. În fine, Bogdan ia de pe masă patru cartonașe pe care sunt scrise patru numere consecutive. Care este cea mai mică valoare a numărului natural  $n$  pentru care Bogdan își poate asigura efectuarea ambelor sale mutări?

Concursul Baltic Way, 2018

**Soluție:**

Răspunsul este  $n = 14$ .

Mai întâi, să demonstrăm că dacă  $n \leq 13$ , Ana îl poate împiedica pe Bogdan să efectueze cea de-a doua sa mutare. Dacă  $n < 10$  este evident că nu se pot lua  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$  cartonașe de pe masă. Dacă  $n \geq 10$ , Ana ia mai întâi cartonașul cu numărul 4.

Dacă  $n = 10$  sau  $n = 11$ , la a doua ei mutare, Ana face în așa fel încât numărul 8 să fie luat. Dacă l-a luat Bogdan, el nu mai are o a doua mutare. Dacă nu l-a luat, Ana poate lua 6, 7, 8 sau 8, 9, 10.

Dacă  $n = 12$ , la a doua ei mutare, Ana face în așa fel încât numerele 8 și 9 să fie luate. Dacă le-a luat Bogdan pe amândouă, el nu mai are o a doua mutare. Dacă Bogdan a luat 7, 8, Ana ia 9, 10, 11, iar dacă Bogdan a luat 9, 10, Ana ia 6, 7, 8. Dacă Bogdan a lăsat numerele 8, 9 pe masă, Ana poate lua 7, 8, 9 sau 8, 9, 10. Oricum ar fi, lui Bogdan nu îi rămân patru numere consecutive pe masă.

Dacă  $n = 13$ , la a doua ei mutare, Ana face în așa fel încât numerele 8, 9 și 10 să fie luate. Dacă Bogdan a luat zero, una sau două dintre ele, Ana le ia pe cele rămase (dacă Bogdan a luat 9, 10, ea poate lua 11, 12, 13), iar lui Bogdan nu îi rămân patru numere consecutive pe masă.

Să arătăm acum că, dacă  $n = 14$ , Bogdan își poate asigura efectuarea ambelor sale mutări. El folosește următoarea strategie. Fie  $k$  numărul șters de Ana la prima ei mutare. Datorită simetriei, putem presupune  $k \leq 7$ . Dacă  $k \geq 5$ , Bogdan șterge 13 și 14 și vor rămâne două intervale de lungime 4: de la 1 la 4 și de la 9 la 12. Ana nu le poate strica pe amândouă, iar Bogdan va putea lua numerele de la 1 la 4 sau pe cele de la 9 la 12.

Dacă însă  $k \leq 4$ , Bogdan poate șterge, de exemplu, 9 și 10 rămânând cu două intervale de lungime 4: de la 5 la 8 și de la 11 la 14. Din nou, Ana nu le poate strica pe amândouă; Bogdan va putea muta în intervalul lăsat de Ana.