Etapa 5, Problema 4

Se ştie că ecuaţia Pell $x^2 - 3y^2 = 1$ are o infinitate de soluţii întregi (x_n, y_n), $n \in \mathbb{N}$. Demonstraţi că o infinitate dintre aceste soluţii au proprietatea că numărul $x_n - 1$ este pătrat perfect.

Titu Zvonaru, L300 din Recreaţii Matematice 1/2016

Soluţie.

Ecuaţia Pell din enunţ are soluţia de bază $x_0 = 2, y_0 = 1$ iar soluţiile sale sunt date de recurenţele $x_{n+1} = 2x_n + 3y_n$, $y_{n+1} = x_n + 2y_n$.

Se observă uşor că, pentru fiecare număr natural k, avem: $x_{2k} \equiv 2\,(\text{mod}3)$, x_{2k} este număr par, iar y_{2k} este număr impar. Fie atunci $x_{2k} = 3u_{2k} + 2$; scriind că $(3u_{2k} + 2, y_{2k})$ este soluţie a ecuaţiei din enunţ, obţinem:

$$(3u_{2k} + 2)^2 - 3y_{2k}^2 = 1 \Leftrightarrow (3u_{2k} + 1)(u_{2k} + 1) = y_{2k}^2. \ (\star)$$

Fie d un divizor al numerelor $3u_{2k} + 1$ şi $u_{2k} + 1$; atunci d divide $3(u_{2k} + 1) - (3u_{2k} + 1) = 2$. Cum y_{2k} este număr impar, deducem că $d = 1$, adică numerele $3u_{2k} + 1$ şi $3u_{2k} + 1$ sunt prime între ele.

Folosind $(\star)$, obţinem că atât $3u_{2k} + 1 = x_{2k} - 1$ cât şi $u_{2k} + 1$ sunt pătrate perfecte. Astfel, am găsit şirul $(x_{2k})_{k \geq 1}$ cu proprietatea dorită.