Problema 4. *Pe un cerc se consideră $2n$ puncte distincte, unde $n \in \mathbb{N}^*$. În câte moduri putem construi n coarde pe cerc care nu se intersectează, folosind cele $2n$ puncte? Figura următoare reprezintă un exemplu pentru cazul $n = 3$.*

***

Soluție: Vom demonstra prin inducție că numărul căutat este C_n, adică al n-lea număr al lui Catalan.

Pentru $n = 1$ avem două puncte pe cerc, care determină o singură coardă. Pentru $n \leq k$ presupunem că numărul de coarde este egal cu C_n, și demonstrăm acum pentru $n = k + 1$. Notăm punctele de pe cerc, in ordine cu $A_1, A_2, ..., A_{2k+2}$. Pentru realizarea unei construcții corecte trebuie ca punctul A_1 să fie unit doar cu unul dintre puntele următoarei mulțimi $\{A_2, A_4, A_6, ..., A_{2k+2}\}$. Să presupunem că punctul A_1 este unit cu punctul A_{2p}, unde $p \in \{1, 2, 3, .., k+1\}$. Atunci de o parte a coardei A_1A_{2p} se află punctele $A_2, A_3, .., A_{2p-1}$, adică $2p - 2$ puncte. Pentru a respecta cerința, aceste puncte se pot uni în C_{p-1} moduri. De cealaltă parte se află punctele $A_{2p+1}, A_{2p+2}, ..., A_{2k+2}$, adică $2k + 2 - 2p$ puncte. Acestea se pot uni în C_{k+1-p} moduri. Prin urmare dacă unim pe A_1 cu A_{2p} restul punctelor se unesc în $C_{p-1}C_{k+1-p}$ moduri.

Astfel, numărul total de construcție a celor $k + 1$ coarde este

$$\sum_{p=1}^{k+1} C_{p-1}C_{k+1-p} = C_0C_k + C_1C_{k-1} + C_2C_{k-2} + ... + C_kC_0 = C_{k+1},$$

ultima egalitate fiind aplicației a Propoziției 2.6. din materialul pregătitor. Cu aceasta demonstrația este finalizată.