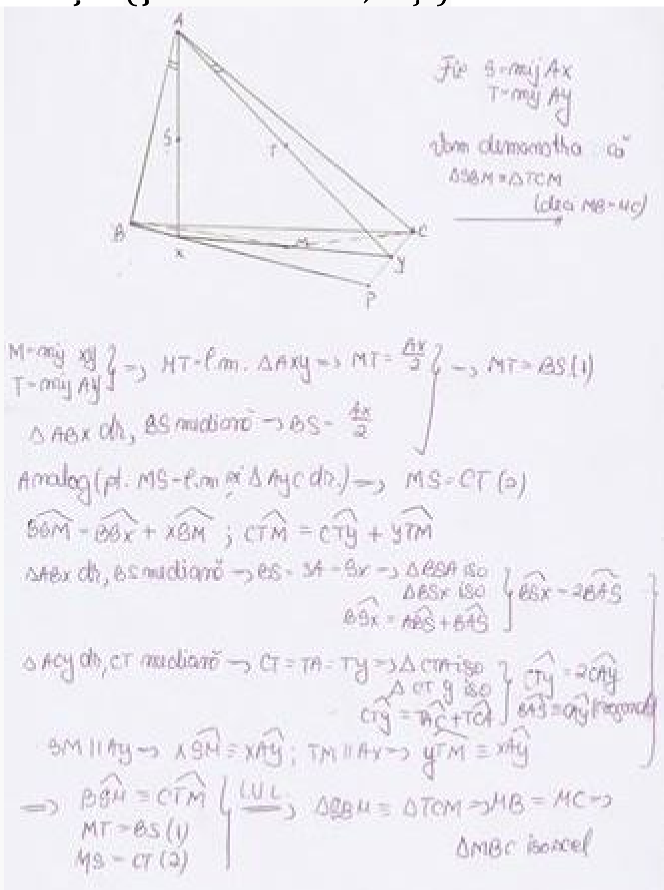
Etapa 6, Problema 2

Considerăm un triunghi ABC. Perpendiculara în B pe AB intersectează perpendiculara în C pe AC în punctul P. Două izogonale duse din vârful A taie dreptele BP și CP în punctele X respectiv Y. Dacă M este mijlocul segmentului XY, arătați că triunghiul MBC este isoscel.

Titu Zvonaru și Neculai Stanciu, Recreații Matematice 1/2015

Soluție (**Ştefan Obadă**, Iași).



Soluție alternativă.

Teorema medianei aplicată în triunghiul BXY arată că

$$4MB^2 = 2\left(BX^2 + BY^2\right) - XY^2.$$

Notând cu α măsura unghiului $\sphericalangle BAX$ și folosind teorema lui Pitagora în triunghiul ABX și teorema cosinusului în triunghiul ABY, avem că

$$BX^2 + BY^2 = AX^2 - AB^2 + AB^2 + AY^2 - 2AB \cdot AY\cos\left(A - \alpha\right),$$

prin urmare

$$4MB^2 = 2\left(AX^2 + AY^2 - 2AB \cdot AY \cos\left(A - \alpha\right)\right) - XY^2.$$

Ținând seama de faptul că AX și AY sunt izogonale, în mod analog rezultă că

$$4MC^2 = 2\left(AX^2 + AY^2 - 2AC \cdot AX \cos\left(A - \alpha\right)\right) - XY^2.$$

Din asemănarea triunghiurilor ABX și ACY obținem $AB \cdot AY = AC \cdot AX$, așadar $MB^2 = MC^2$, deci triunghiul MBC este isoscel.