

**Etapa 6, Problema 2**

Considerăm un triunghi  $ABC$ . Perpendiculara în  $B$  pe  $AC$  intersectează perpendiculara în  $C$  pe  $AB$  în punctul  $P$ . Două izogonale duse din vârful  $A$  taie dreptele  $BP$  și  $CP$  în punctele  $X$  respectiv  $Y$ . Dacă  $M$  este mijlocul segmentului  $XY$ , arătați că triunghiul  $MBC$  este isoscel.

*Titu Zvonaru și Neculai Stanciu, Recreații Matematice 1/2015*

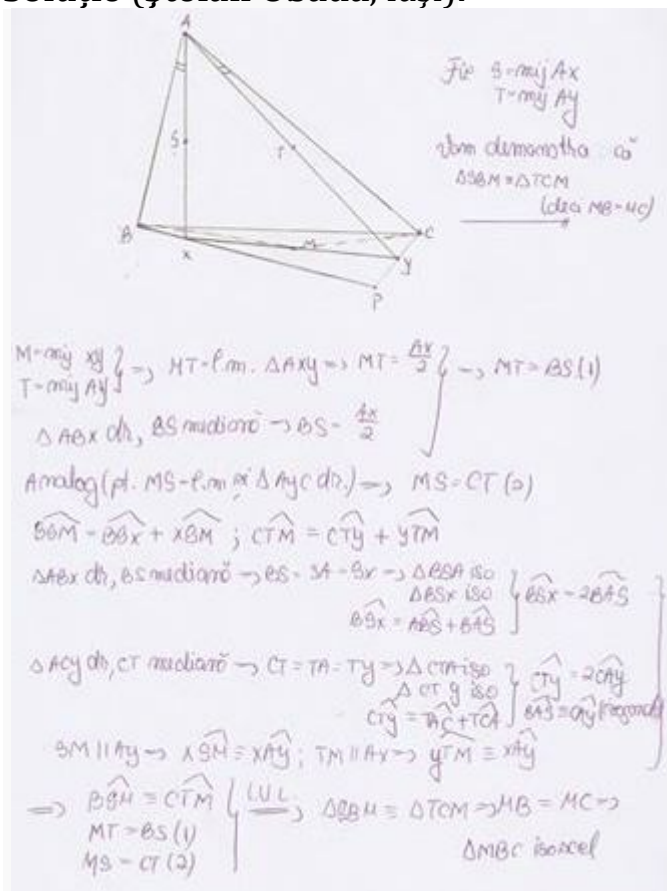
**Soluție (Ștefan Obadă, Iași).**


Diagram: A triangle  $ABC$  with altitudes  $BS$  and  $CT$  intersecting at  $P$ . Isogonal lines from  $A$  intersect  $BP$  at  $X$  and  $CP$  at  $Y$ .  $M$  is the midpoint of  $XY$ .

Handwritten notes:

- $M = \text{mij } XY$   
 $T = \text{mij } AY$
- Vom demonstra că  
 $\triangle SBM \cong \triangle TCM$   
 (deci  $MB = MC$ )
- $M = \text{mij } XY$   
 $T = \text{mij } AY$
- $\triangle AXY$  în  $M$  și  $T$  în  $AY$  ⇒  $MT = \frac{AX}{2}$  ⇒  $MT = BS$  (1)
- $\triangle ABX$  dr.,  $BS$  mediană ⇒  $BS = \frac{AX}{2}$
- Analog (pt.  $MS = \text{mij } AX$  și  $\triangle AYC$  dr.) ⇒  $MS = CT$  (2)
- $\widehat{B\hat{M}} = \widehat{B\hat{X}} + \widehat{X\hat{B}M}$ ;  $\widehat{C\hat{T}M} = \widehat{C\hat{T}Y} + \widehat{Y\hat{T}M}$
- $\triangle ABX$  dr.,  $BS$  mediană ⇒  $BS = \frac{AX}{2} = BX$  ⇒  $\triangle BSA$  iso  
 $\triangle BSX$  iso ⇒  $\widehat{B\hat{S}X} = 2\widehat{B\hat{A}S}$   
 $\widehat{B\hat{S}X} = \widehat{A\hat{B}S} + \widehat{B\hat{A}S}$
- $\triangle AYC$  dr.,  $CT$  mediană ⇒  $CT = \frac{AY}{2} = TY$  ⇒  $\triangle CTA$  iso  
 $\triangle CTY$  iso ⇒  $\widehat{C\hat{T}Y} = 2\widehat{C\hat{A}Y}$   
 $\widehat{C\hat{T}Y} = \widehat{A\hat{C}T} + \widehat{C\hat{A}Y}$  ⇒  $\widehat{A\hat{C}T} = \widehat{C\hat{A}Y}$  (congruență)
- $SM \parallel AY$  ⇒  $\widehat{X\hat{S}M} = \widehat{X\hat{A}Y}$ ;  $TM \parallel AX$  ⇒  $\widehat{Y\hat{T}M} = \widehat{Y\hat{A}X}$
- ⇒  $\widehat{B\hat{S}M} = \widehat{C\hat{T}M}$  (LUL) ⇒  $\triangle SBM \cong \triangle TCM$  ⇒  $MB = MC$  ⇒  $\triangle MBC$  isoscel

**Soluție alternativă.**

Teorema medianei aplicată în triunghiul  $BXY$  arată că

$$4MB^2 = 2(BX^2 + BY^2) - XY^2.$$

Notând cu  $\alpha$  măsura unghiului  $\sphericalangle BAX$  și folosind teorema lui Pitagora în triunghiul  $ABX$  și teorema cosinusului în triunghiul  $ABY$ , avem că

$$BX^2 + BY^2 = AX^2 - AB^2 + AB^2 + AY^2 - 2AB \cdot AY \cos(A - \alpha),$$

prin urmare

$$4MB^2 = 2(AX^2 + AY^2 - 2AB \cdot AY \cos(A - \alpha)) - XY^2.$$

Ținând seama de faptul că  $AX$  și  $AY$  sunt izogonale, în mod analog rezultă că

$$4MC^2 = 2(AX^2 + AY^2 - 2AC \cdot AX \cos(A - \alpha)) - XY^2.$$

Din asemănarea triunghiurilor  $ABX$  și  $ACY$  obținem  $AB \cdot AY = AC \cdot AX$ , așadar  $MB^2 = MC^2$ , deci triunghiul  $MBC$  este isoscel.