Etapa 1, Problema 1

Prin înfăşurarea unui dreptunghi de perimetru 1 se obţine suprafaţa laterală a unui cilindru. Determinaţi volumul maxim posibil al acestui cilindru şi precizaţi dimensiunile dreptunghiului pentru care se atinge acest maxim.

***

Soluţie.

Fie a şi b dimensiunile dreptunghiului, cu $a+b=\frac{1}{2}$. Dacă înălţimea cilindrului este a, raza acestuia va fi $\frac{b}{2\pi}$, iar volumul va fi egal cu $V=\frac{1}{4\pi}ab^2$. Din inegalitatea mediilor obţinem că

$$V=\frac{1}{\pi}\cdot a\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{b}{2}\leq\frac{1}{\pi}\left(\frac{a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}}{3}\right)^3=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216\pi}.$$

Deducem că $V_{max}=\frac{1}{216\pi}$, valoarea maximă atingându-se când $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{3}$ (iar înfăşurarea se face astfel încât înălţimea să fie de lungime a).

Soluţie alternativă.

Cu notaţiile din soluţia precedentă, avem de determinat maximul funcţiei

$$V(b)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}-b\right)b^2,\ b\in\left(0,\frac{1}{2}\right).$$

Derivata lui V este pozitivă pe intervalul $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ şi negativă pe $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$, prin urmare V îşi atinge maximul pentru $b=\frac{1}{3}$, iar $V_{max}=\frac{1}{216\pi}$.