Clasa a X-a - Etapa 4

Problema 4. *Determinaţi numărul funcţiilor* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *care satisfac simultan condiţiile:*

a) $f(f(n) + n) = f(n), \forall n \in \mathbb{N}$;
b) $f(2017) = 1$.

***

Soluţie. Prin inducţie matematică deducem că

$$f(n) = 1, \forall n \geq 2017.$$

Dacă presupunem apoi prin reducere la absurd că ar exista $p \in \{0, 1, 2, .., 2016\}$ astfel încât $f(p) = q > 1$. Atunci

$$f(f(p) + p) = f(p) \Leftrightarrow f(p + q) = q.$$

Apoi

$$f(f(p + q) + p + q) = f(p + q) \Leftrightarrow f(p + 2q) = q.$$

Inductiv deducem că

$$f(p + kq) = q$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$, ceea ce vine în contradicţie cu ceea ce am obţinut iniţial. Prin urmare $f(n) \in \{0, 1\}$, pentru orice $n \in \{0, 1, 2, ..., 2017\}$.

În condiţiile actuale este evident că dacă există $p \in \{0, 1, 2..., 2016\}$ pentru care $f(p) = 1$ atunci vom avea $f(q) = 1$ pentru orice $q \in \{p, p + 1, .., 2016\}$. Prin urmare soluţiile problemei sunt funcţiile

$$f_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \ f_p(x) = \begin{cases} 1, & n \geq p \\ 0, & \text{în rest} \end{cases},$$

pentru orice $p \in \{0, 1, 2, .., 2017\}$. Deci sunt 2018 funcţii care verifică condiţiile din ipoteză.