Clasa a X-a - Etapa 2 - Problema 4

Enunţ. Fie $A = \left\{ a + b\sqrt{2} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ şi $B = \left\{ c + d\sqrt[3]{2} \,\middle|\, c, d \in \mathbb{Q} \right\}$. Calculaţi $A \cap B$.

Soluţie. Demonstrăm că $A \cap B = \mathbb{Q}$. Evident $\mathbb{Q} \subset A$ şi $\mathbb{Q} \subset B$, deci $\mathbb{Q} \subset A \cap B$. Reciproc, fie $x \in A \cap B$. Atunci $x = a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt[3]{2}$. Atunci $d\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{2} - c$. Prin ridicare la cub obţinem că $\left(a + b\sqrt{2} - c\right)^3 \in \mathbb{Q}$, deci $3\left(a - c\right)^2 b\sqrt{2} + 2b^3\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, de unde $3\left(a - c\right)^2 b + 2b^3 = 0$.

Dacă $b = 0$, obţinem imediat $x = a \in \mathbb{Q}$. Dacă $3\left(a - c\right)^2 + 2b^2 = 0$ obţinem $a = c$ şi $b = 0$, deci $x = a \in \mathbb{Q}$. Atunci $A \cap B \subset \mathbb{Q}$ şi concluzia se impune. $\square$