Problema 4. Se consideră numărul natural $n \geqslant 2$ şi numerele reale x şi y, astfel încât $x \geqslant y \geqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$. Demonstraţi că:

$$\sqrt[n]{x} + \sqrt[n+1]{y} \geqslant \sqrt[n+1]{x} + \sqrt[n]{y}.$$

* * *

Soluţie. Fie $a = \sqrt[n(n+1)]{x}$ şi $b = \sqrt[n(n+1)]{y}$. Avem $a \geqslant b \geqslant \frac{n}{n+1}$, iar inegalitatea de demonstrat devine:

$$a^{n+1} + b^n \geqslant a^n + b^{n+1}, \text{ oricare ar fi } a, b \in \mathbb{R},\ a \geqslant b \geqslant \frac{n}{n+1}. \tag{1}$$

Dacă $a = b$, atunci (1) este evident adevărată, iar dacă $a > b$, atunci rescriem (1) sub forma $a^{n+1} - b^{n+1} \geqslant a^n - b^n$. Împărţind inegalitatea precedentă cu $(a-b) \cdot b^{n-1} > 0$, obţinem inegalitatea echivalentă:

$$b \cdot \left(\left(\frac{a}{b}\right)^n + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{a}{b} + 1 \right) \geqslant \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} + \ldots + \frac{a}{b} + 1 \tag{2}$$

Demonstrăm că pentru orice $x > 1$, are loc inegalitatea:

$$\frac{x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1}{x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1} \leqslant \frac{n}{n+1}. \tag{3}$$

Inegalitatea (3) este echivalentă cu $nx^n \geqslant 1 + x + \ldots + x^{n-1}$ şi este evident adevărată, deoarece $x^n > x^i$, pentru orice $i = \overline{0, n-1}$.

Deoarece $\frac{n}{n+1} \leqslant b$, înlocuind $x = \frac{a}{b}$ în (3), deducem că inegalitatea (2) este adevărată, deci şi inegalitatea din enunţ este adevărată.