Problema 3

Fie mulțimea $M = \{a + b\sqrt{3} \,/\, a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 3b^2 = 1\}$. Să se demonstreze că mulțimea $M \cap (-0{,}001; 0)$ este infinită.

SOLUTIE

In primul rând arătăm că dacă avem $a+b\sqrt{3} \in M$ și $x+y\sqrt{3} \in M$ cu $a \neq x$ și $b \neq y$ atunci și produsul $(a+b\sqrt{3})(x+y\sqrt{3}) \in M$.

Într-adevăr $(a+b\sqrt{3})(x+y\sqrt{3}) = ax + 3by + (ay+bx)\cdot\sqrt{3}$

Dar, $(ax+3by)^2 - 3(ay+bx)^2 = 1$ (demonstrăm) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2x^2 + 9b^2y^2 + 6axby - 3(a^2y^2 + b^2x^2 + 2axby) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2x^2 + 9b^2y^2 + \cancel{6axby} - 3a^2y^2 - 3b^2x^2 - \cancel{6axby} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2(x^2 - 3y^2) - 3b^2(x^2 - 3y^2) = 1 \Leftrightarrow (a^2 - 3b^2)(x^2 - 3y^2) = 1$. Dar știm din ipoteză că $a+b\sqrt{3} \in M \Rightarrow a^2 - 3b^2 = 1$ și $x+y\sqrt{3} \in M \Rightarrow x^2 - 3y^2 = 1$ deci $(a^2-3b^2)(x^2-3y^2) = 1 \cdot 1 = 1$ adevărat deci în concluzie dacă $a+b\sqrt{3} \in M$ și $x+y\sqrt{3} \in M$ $a \neq x$, $b \neq y$ atunci și $(a+b\sqrt{3})(x+y\sqrt{3}) \in M$.

In continuare, demonstrăm că dacă $a+b\sqrt{3} \in M$ atunci și $(a+b\sqrt{3})^2 \in M$

$(a+b\sqrt{3})^2 \in M \Leftrightarrow (a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{3}) \in M \Leftrightarrow (a^2+3b^2)^2 - 3\cdot 4a^2b^2 = 1 \Leftrightarrow a^4 + 9b^4 + 3\,2a^2b^2 - 3\cdot 4a^2b^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^4 + 9b^4 - 6a^2b^2 = 1 \Leftrightarrow (a^2 - 3b^2) = 1$.

Scanned by CamScanner

Dar din presupunerea făcută, $a+b\sqrt{3} \in H \Rightarrow a^2-3b^2=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (a^2-3b^2)^2=1$ deci dacă $a+b\sqrt{3} \in H$ atunci și $(a+b\sqrt{3})^2 \in H$.

De aici deducem că există minim 2 termeni ai lui H întrucât a și b nu pot fi simultan 1 iar din faptul că dacă $a+b\sqrt{3} \in H$, $x+y\sqrt{3} \in H$ atunci $(a+b\sqrt{3})(x+y\sqrt{3}) \in H$ demonstrată vom obține că $(a+b\sqrt{3})^n \in H$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $a=-2$ și $b=1$ avem $a^2-3b^2=4-3=1$ deci $-2+\sqrt{3} \in H$ iar $-2+\sqrt{3} \simeq 0{,}267949$ deci $-1 < -2+\sqrt{3} < 0$
Deci $-2+\sqrt{3}$ e subunitar, negativ $\Rightarrow (-2+\sqrt{3})^{2k+1} > -2+\sqrt{3}$ cu $k \in \mathbb{N}^*$

Puteri impare întrucât $(-2+\sqrt{3})^{2k+1} \in (-1,0)$. Observăm că, odată cu creșterea puterii numărul se apropie de 0 (crește numărul de zerouri)

Deci, de la o putere $2q+1$ vom avea $(-2+\sqrt{3})^{2q+1} > -0{,}001$ dar va rămâne mai mic ca 0 întrucât $-2+\sqrt{3}$ este negativ adică în intervalul $(-0{,}001, 0)$.

Pentru $q=1$, $(-2+\sqrt{3})^{2q+1} \leq (-2+\sqrt{3})^3 < -0{,}001$ (F)
Pentru $q=2$ $(-2+\sqrt{3})^{2q+1} = (-2+\sqrt{3})^5 < -0{,}001$ (F)
Pentru $q=3$ $(-2+\sqrt{3})^{2q+1} = (-2+\sqrt{3})^7 > (-0{,}268)^7 =$
$= -0{,}000099298 7 > -0{,}001$

Întrucât $(-2+\sqrt{3})^{2q+1}$ este subunitar cu cât q crește cu atât valoarea se apropie de 0 deci mulțimea $H \cap (0{,}001, 0)$ conține o infinitate de elemente de forma $(-2+\sqrt{3})^{2k+1}$ cu $k \geq 3$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Scanned by CamScanner