Etapa 6, Problema 4

Trei cercuri de aceeaşi rază sunt situate în interiorul unui triunghi şi sunt tangente, fiecare, la câte două dintre laturile triunghiului. Cele trei cercuri au un punct comun *P*. Demonstrați că punctul *P*, centrul *I* al cercului înscris în triunghi şi centrul *O* al cercului circumscris triunghiului sunt trei puncte coliniare.

***

Soluție.

Notăm cu A_1, A_2, A_3 vârfurile triunghiului şi cu O_1, O_2, O_3 centrele celor trei cercuri, astfel încât O_i să se afle pe bisectoarea unghiului A_i, $i=\overline{1,3}$.

Cum cercurile au raze egale, rezultă că dreptele O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 sunt paralele cu A_1A_2, A_2A_3 respectiv A_3A_1. Atunci triunghiurile $A_1A_2A_3$ şi $O_1O_2O_3$ sunt omotetice, centrul de omotetie fiind intersecția dreptelor A_1O_1, A_2O_2 şi A_3O_3, adică centrul *I* al cercului înscris în triunghi.

Punctul *P* este egal depărtat de O_1, O_2, O_3, deci este centrul cercului circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$. Rezultă că *P*, centrul *O* al cercului circumscris triunghiului $A_1A_2A_3$ şi centrul de omotetie *I* sunt trei puncte coliniare, ceea ce trebuia demonstrat.