Clasa a IX-a

Problema1. a) Demonstraţi că pentru orice număr natural n are loc inegalitatea

$$3^n > n^2 + n. \tag{1}$$

b) Fie m şi p două numere naturale nenule, $p \geq 3$. Arătaţi că numărul $\left[\dfrac{p^m}{m}\right]$ este o putere cu exponent natural a lui p dacă şi numai dacă m este o putere cu exponent natural a lui p.

($[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x)

OJM 2008 (generalizare)

Soluţie.

a) Vom demonstra inegalitatea (1) prin inducţie matematică.
Pentru $n = 0$ inegalitatea (1) devine $3^0 > 0$, iar pentru $n = 1$ inegalitatea (1) devine $3^1 > 2$, evident adevărate. Să presupunem că $3^n > n^2 + n, n \geq 1$ şi să demonstrăm că $3^{n+1} > (n+1)^2 + n + 1$. Avem succesiv

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3(n^2 + n) = 3n(n+1) \geq (n+2)(n+1) = (n+1)^2 + n + 1$$

....**2 puncte**

b) Să presupunem că $m = p^k, k \in \mathbb{N}$. Deoarece $p \geq 3$, conform a) avem $p^m \geq 3^m > m^2 + m > m = p^k$, deci $m > k$. Atunci:

$$\left[\frac{p^m}{m}\right] = \left[\frac{p^m}{p^k}\right] = p^{m-k}, \text{cu } m - k \in \mathbb{N}.$$

....**1 punct**

Reciproc, să presupunem că $\left[\dfrac{p^m}{m}\right] = p^k, k \in \mathbb{N}$. Atunci

$$p^k \leq \frac{p^m}{m} < p^k + 1 \quad \Leftrightarrow \quad m \cdot p^k \leq p^m < m \cdot p^k + m,$$

deci $p^m = m \cdot p^k + r$ cu $0 \leq r \leq m - 1$ (evident $r \in \mathbb{N}$).

Atunci $p^m - m \cdot p^k = r$, deci p^k divide r.

Dacă $p^k < m$, atunci $p^m = m \cdot p^k + r < m^2 + m < 3^m \leq p^m$, absurd.
Rezultă $p^k \geq m > r$ şi cum p^k divide r, rezultă $r = 0$ şi atunci
$m = p^{m-k}$. ....**4 puncte**