P1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, iar $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ o funcţie surjectivă, continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b). Arătaţi că există $c \in (a, b)$ cu $(f'(c))^2 = 1$.

S. Fie $a_1, b_1 \in [a, b]$ date de $a_1 = f(a)$, $b_1 = f(b)$, iar $c_1 \in (a, b)$ cu proprietatea că $(b-a)f'(c_1) = b_1 - a_1$. Deoarece $|b_1 - a_1| \leq |b - a|$, avem că $|f'(c_1)| \leq 1$.
De asemenea, există $a_2, b_2 \in [a, b]$ şi $c_2 \in (min(a_2, b_2), max(a_2, b_2))$ astfel încât $f(a_2) = a, f(b_2) = b$ şi $b - a = (b_2 - a_2)f'(c_2)$. Evident, $|b - a| \geq |b_2 - a_2|$, astfel că $|f'(c_2)| \geq 1$.
Deoarece f' are proprietatea lui Darboux, iar funcţia $|\cdot|$ este continuă, rezultă că funcţia compusă $|\cdot| \circ f'$ are proprietatea lui Darboux. Prin urmare, există $c \in [min(c_1, c_2), max(c_1, c_2)]$ cu $|f'(c)| = 1$, sau, echivalent, $(f'(c))^2 = 1$.