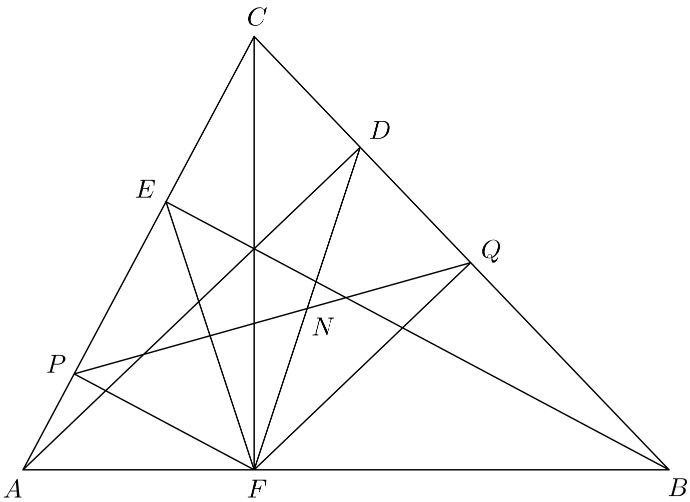
Problema 4. În triunghiul ascuţitunghic ABC, punctele D, E, F sunt picioarele înălţimilor din A, B, respectiv C, iar P, Q sunt proiecţiile lui F pe AC, respectiv BC. Arătaţi că dreapta PQ intersectează segmentele $[DF]$ şi $[EF]$ în mijloacele acestora.

Turneul Oraşelor, 2011[1]

Soluţia 1:
Având unghiurile opuse drepte, deci suplementare, patrulaterul $CPFQ$ este inscriptibil. Deducem că $m(\angle PQF) = m(\angle ACF) = 90° - m(\angle A)$, deci $m(\angle CQP) = 180° - m(\angle PQF) - m(\angle FQB) = 180° - 90° + m(\angle A) - 90° = m(\angle A)$. Dar şi patrulaterul $ACDF$ este inscriptibil (înscris în cercul de diametru $[AC]$), deci $m(\angle FDQ) = 180° - m(\angle FDC) = m(\angle A)$. Dacă notăm cu N punctul în care dreapta PQ taie segmentul $[FD]$, avem că triunghiul DNQ este isoscel, deci N este intersecţia dintre mediatoarea catetei $[DQ]$ şi ipotenuza $[FD]$ a triunghiului dreptunghic FDQ, adică mijlocul lui $[FD]$.
Analog se arată că dreapta PQ trece şi prin mijlocul segmentului $[EF]$.



Observaţie: Ipoteza ABC-ascuţitunghic este inutilă; ea nu apare în enunţul original.

Soluţia 2: Fie S şi T proiecţiile punctului F pe dreptele AD, respectiv BE. Vom arăta că punctele P, S, T, Q sunt coliniare.

[1] Senior A-level, Fall

Patrulaterele $FPET$ şi $FQDS$ sunt dreptunghiuri, iar $AFSP$ şi $BFTQ$ sunt patrulatere inscriptibile, înscrise în cercurile de diametre $[AF]$, respectiv $[BF]$. Atunci $m(\angle PSA) = m(\angle PFA) = 90^\circ - m(\angle A)$, iar $m(\angle DSQ) = m(\angle SQF) = m(\angle TQF) = m(\angle TBF) = 90^\circ - m(\angle A) = m(\angle PSA)$. Cum punctele P şi Q sunt în semiplane diferite determinate de AD, conform reciprocei teoremei unghiurilor opuse la vârf, rezultă că punctele P, S, Q sunt coliniare. Analog, P, T, Q sunt coliniare. În dreptunghiul $FPET$, diagonala $[PT]$ trece prin mijlocul diagonalei $[EF]$, iar în dreptunghiul $FQDS$, diagonala $[SQ]$ trece prin mijlocul diagonalei $[FD]$, de unde rezultă concluzia.